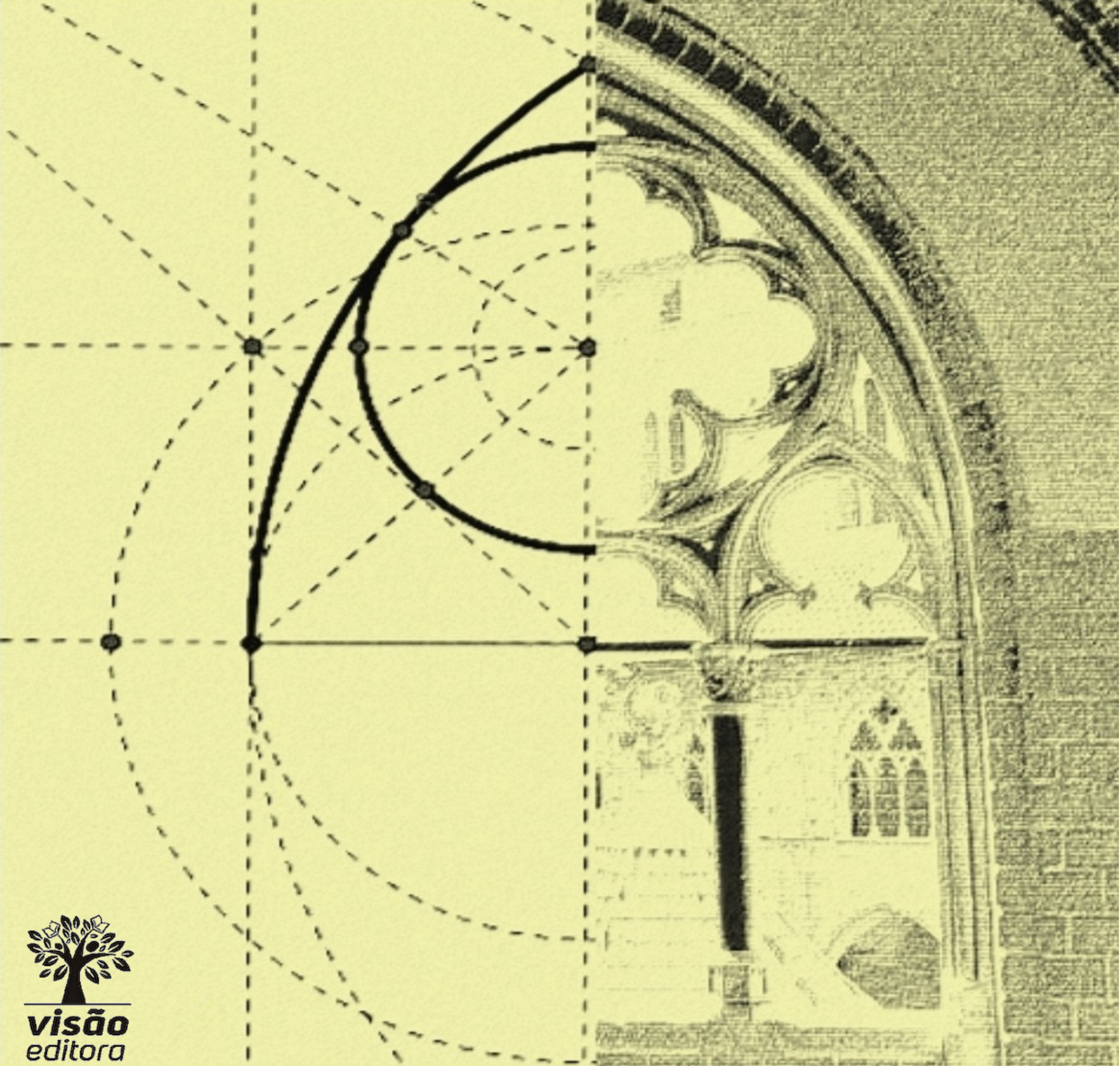


GUIA DE ESTUDOS

Prática de ensino:

Construções Geométricas

Jorge Luís Costa

JORGE LUÍS COSTA

PRÁTICA DE ENSINO
Construções Geométricas

2ª edição



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Luis Costa, Jorge

Prática de Ensino: Construções Geométricas

Jorge Luis Costa , Cabo Frio, RJ : Visão Editora,/ Publicação 2016. / 14x20 cm. 216 pg.

ISBN 978-85- 67270-28-9

MATEMÁTICA , EDUCAÇÃO I - Título

CDD- 370

ISBN: 978-85-67270-29-6 (e-book/PDF)

IMPRESSÃO E ACABAMENTO
Visão Editora
Av. Ézio Cardoso da Fonseca, 99 - Jardim Esperança
Cabo Frio - RJ - CEP 28920-000
Tel.: (22) 99725 2879
e-mail: contatovisaoeditora@gmail.com
http://www.visaograficaeeditora.com.

Agradeço a todos os colegas e alunos que me incentivaram a colocar minhas notas de aulas nesse formato, aos amigos que me estimularam a continuar usando *softwares* gratuitos nessa empreitada e a aqueles que desenvolvem e compartilham programas desse tipo.

Aproveito para fazer um agradecimento especial ao Prof. Pedro Mendes - meu mestre e amigo quem muito respeito e admiro - pelas leituras e sugestões.

Sumário

PREFÁCIO

Sinto-me orgulhoso e honrado com o convite de meu amigo, Professor Jorge Luís Costa, para escrever o **Prefácio** de seu **Guia de Estudos – Prática de Ensino: Construções Geométricas**.

O texto apresenta as construções básicas relativas a figuras planas importantes, tais como segmentos, retas, retas paralelas, retas perpendiculares, ângulos, triângulos, quadrados, losangos, retângulos, polígonos diversos, círculos, ovais e cônicas.

As construções são apresentadas em primeiro lugar no padrão grego clássico, com o uso apenas da régua e do compasso; em segundo lugar, são apresentadas com o uso não só da régua e do compasso, mas também dos esquadros e do transferidor; em terceiro lugar, o autor introduz o Programa GeoGebra e com ele realiza novamente as construções. O Programa GeoGebra permite realizar construções dinâmicas, que são de grande importância para a compreensão da Geometria Euclideana Plana. Aqui é bom ressaltar que, ao descrever as construções com o uso do GeoGebra, o autor contempla com grande habilidade uma descrição didática de como usar o referido programa!

Além das três maneiras de apresentar as construções, mencionadas acima, denominadas "mídias", o autor apresenta também construções mecânicas das cônicas, elipse, hipérbole e parábola.

Para um aprendizado eficiente com a ajuda deste **Guia de Estudos** é essencial que o usuário tente resolver todos os exercícios e problemas propostos. O conteúdo dos exercícios e problemas é parte relevante das construções geométricas e da geometria neles incluída. É também fundamental estudar os textos indicados no Guia. Os conteúdos desses

textos são importantes nas justificativas para as construções geométricas abordadas.

Desejo ressaltar que o uso do GeoGebra nas construções geométricas, especialmente em construções dinâmicas, além de ajudar de modo decisivo na compreensão da Geometria Euclideana Plana, pode ser motivador para seu uso em outras disciplinas matemáticas, como na Álgebra, na Geometria Analítica e no Cálculo.

Este **Guia de Estudos** certamente proporcionará ao usuário uma visão mais clara e mais ampla da Geometria Euclideana.

O autor está de parabéns pelo texto! Desejo muito sucesso a seus usuários!

Pedro Mendes

(Professor Titular Aposentado – Departamento de Matemática – ICEx –UFMG)

APRESENTAÇÃO

Caro aluno;

É com muita satisfação que lhe entrego esse texto, que chamo de **Guia de estudos**, pois o usaremos na disciplina de *Prática de Ensino: Construções geométricas*. Optei por usar uma linguagem coloquial, onde procuro "conversar" com você. Na composição do texto, em diversos momentos, indico-lhe trabalhos de outros autores como materiais complementares ou como aprofundamento para o assunto apresentado.

Esse guia é o resultado de diversas experiências. A primeira em relação ao próprio conteúdo. A Construção Geométrica é para mim muito agradável. Remete-me às lembranças de diversas fases de minha formação escolar: no colégio e o fascínio que os esquadros, réguas e compasso exerciam sobre mim; no ensino médio técnico nas disciplinas de desenho; na licenciatura em Matemática; e, no mestrado quando estudamos sua relação com a geometria e a formação de professores.

A segunda experiência é a de trabalhá-la a distância, como uma disciplina de prática de ensino. A cada semestre letivo, busquei refletir no conteúdo, na forma como a disciplina foi trabalhada, nos problemas técnicos gerados pela separação física e temporal e na abordagem do conteúdo quando tento balancear conteúdo (muitas vezes esquecido ou desconhecido dos alunos) com a prática na sala de aula. Com certeza em um próximo momento coisas serão incluídas e retiradas do texto.

A terceira experiência está relacionada com a forma como o guia foi construído. Desde que iniciei meu trabalho no ensino superior em 2002 tenho lecionado disciplinas relacionadas com tecnologia. Sou um defensor do uso de *softwares* gratuitos e, sempre, os indico e utilizo. Várias vezes recebi reclamações de alunos dizendo que aqueles programas não

permitiam fazer o trabalho que precisavam. Impus-me então o desafio de produzir um material mais complexo, um livro. Após vários testes e limitando aos programas que indico consegui criá-lo. Para a digitação e formatação, utilizo o LibreOffice Write (http://pt-br.libreoffice.org), para a edição de imagens utilizo o PhotoFiltre (http://www.photofiltre-studio.com/pf7-en.htm) e para o trabalho com a Geometria, o GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/pt_BR). O *layout* do guia é amador e as imagens podem ser consideradas de baixa qualidade, mas hoje posso afirmar para qualquer aluno do nosso curso de Matemática, futuro professor, que com esses *softwares* consegue-se fazer um trabalho mais "pesado". Na minha opinião isso é dar poder ao professor.

Então é isso… Sinceramente, espero que este **Guia de estudos** seja útil a você durante nossa disciplina e que lhe inspire a continuar estudando e explorando a Geometria e as Construções Geométricas.

Um forte abraço.

Jorge Luís Costa

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E GEOMETRIA: APOIO MÚTUO

A Geometria, segundo vários autores, é um dos conteúdos que permitem o desenvolvimento integrado de competências e habilidades, não só na Matemática, mas também em outras áreas.

Neste tópico inicial, tento responder, basicamente, a duas questões:

- Como o Desenho Geométrico ou Construção Geométrica se relaciona com a Geometria e as outras áreas da Matemática?
- Que processo social colocou a Geometria e o Desenho Geométrico tão à margem das aulas de Matemática?

Geometria: um caso de amor e ódio

A Geometria Plana e o Desenho Geométrico ou Construções Geométricas[1] sempre ocuparam posição de destaque em minhas memórias escolares. Recordo-me das aulas em que se usava compasso, régua, esquadros e transferidor e da satisfação que tinha em poder manipular todos esses instrumentos. Apesar dessa satisfação, nunca tive facilidade em entender os conteúdos. Para mim, eles estavam prontos e eu tinha que decorá-los.

1 As expressões "Construção Geométrica" e "Desenho Geométrico" são usadas como sinônimas, não se fazendo diferença entre elas. Quando forem tratadas de forma diferenciada, isso será indicado no texto.

Quando fiz a Licenciatura em Matemática, encontrei-me novamente com a Geometria Plana e o Desenho Geométrico. E, mais uma vez, veio a sensação do apelo à memória: para traçar a paralela a uma reta dada faz-se assim; para traçar a perpendicular, faz assado; para criar um hexágono é só seguir o roteiro. E assim por diante. Minha curiosidade não era satisfeita, pois queria saber por que aquelas construções davam certo, por que eu tinha que usar aquela circunferência etc.

Nessa vontade de entender as construções e as relações entre seus entes geométricos, eu me envolvia em muito trabalho e pesquisas, que nem sempre eram frutíferos. Nesses casos, a saída era recorrer aos colegas e aos professores.

Naquele momento, o da graduação, pude incluir um novo instrumento: a informática. Com ela fiz experimentações com e nas construções propostas. Dessa forma, novas possibilidades surgiram, pois, a partir daí, pude buscar regularidades, observar relações entre os entes geométricos e assim criar conjecturas, validações e justificativas. Mas, mesmo assim, continuava tendo dificuldades em entender como se chegou àquela solução.

Essa dificuldade com a Geometria não foi (ou é) privilégio meu. Muitos professores de Matemática passaram e passam por ela. Muitas pessoas que foram alunos de Geometria passaram pela mesma formação que tive, mas, como não optaram por trabalhar como professores de Matemática, simplesmente deixaram a Geometria de lado, usando somente o necessário, e seguiram em frente.

Vários autores apontam uma deficiência no ensino de Geometria (como Geometria Plana ou como Desenho Geométrico) que se arrasta por bastante tempo. Dentre eles, pode-se citar Eduardo Wagner, que, no seu livro **Construções Geométricas**, afirma:

> Estando as Construções Geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, esta publicação

> pretende ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria. Os problemas de construção são motivadores, as vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados (WAGNER, 1993, Prefácio).

Outro apontamento significativo a esse respeito pode ser observado no texto “Grupo colaborativo em Geometria: uma trajetória... uma produção coletiva”, das professoras Adair Mendes Nacarato, Adriana Aparecida Molinas Gomes e Regina Célia Grando, pertencente ao livro **Experiências com Geometria na escola pública**. As autoras, docentes que trabalham como formadoras de professores de Matemática, afirmam:

> A escolha da Geometria como campo do saber para o trabalho do grupo nesse período foi proposital. De um lado, porque sabemos, pela nossa experiência como formadoras, que esse campo matemático raramente é trabalhado nas escolas públicas e, quando o é, ocorre ou ao final do ano ou de forma totalmente destituída de sentido e significado para o aluno. Isso sem dúvida, é decorrente das lacunas que o professor traz em sua formação quanto à Geometria. Por outro lado, como docentes dessa disciplina nos cursos de Licenciatura em Matemática, sabíamos que os alunos ingressantes em nossa instituição, no Ensino Superior, são provenientes das escolas públicas de Ensino Médio e não têm conhecimentos básicos nesse campo. (NACARATO, GOMES, GRANDO, 2008, p.27)

Provavelmente surgiriam perguntas. Por exemplo: “Nossa disciplina é Geometria ou Construções Geométricas?”, “Apesar de saber

que Geometria e Construções Geométricas têm os mesmos entes como base, qual a importância de uma para a outra?”

Para tentar esclarecer questões desse tipo, indico, a seguir, um texto.



Leia os **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das Construções Geométricas, entre outras considerações**, da professora Elenice de Souza Lodron Zuin.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das Construções Geométricas, entre outras considerações. In: **25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação** - ANPED, 2002, Caxambu. Disponível em <http://25reuniao.anped.org.br/excedentes25/elenicezuint19.rtf>. Acessado em: 19 mar. 2016.

Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e o Ensino de Geometria e das Construções Geométricas

Como diz a professora Elenice de Souza Lodron Zuin , a educação brasileira tem nos PCN o seu referencial. Citando vários trechos, ela fundamenta sua opinião sobre o assunto e constrói a argumentação. Porém,

para nós, professores, é importante aprofundar um pouco mais o olhar nas recomendações, preferencialmente consultando os originais, para construir um referencial para a prática pedagógica.

Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos

O primeiro destaque que tem relação com a importância do conteúdo de Geometria está em "Espaço e Forma".

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
>
> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.
>
> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.
>
> Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.
>
> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.
>
> Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de

obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1988, p.51).

Conforme se pode observar, os PCN enfatizam categoricamente a importância do conteúdo de Geometria, reforçando as conclusões de várias pesquisas nacionais e internacionais em Educação Matemática.

Nas orientações de "como trabalhar" o bloco **Espaço e Forma**, no 3º ciclo (5ª e 6ª séries), os PCN explicam:

Neste ciclo, os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com as formas nele presentes. Assim é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas (quanto à planicidade, quanto à dimensionalidade), as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformação (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução.

A partir de contextos que envolvam a leitura de guias, plantas e mapas pode-se propor um trabalho para que os alunos localizem pontos, interpretem deslocamentos no plano e desenvolvam a noção de coordenadas cartesianas, percebendo que estas constituem um modo organizado e convencionado, ou seja, um sistema de referência para representar objetos matemáticos como ponto, reta e curvas. Também é interessante que os alunos percebam a analogia entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geográficas.

Ainda neste ciclo, as atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Desse modo, o estudo do

espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Porém, isso não significa que não se deva ter preocupação em levar os alunos a fazer uso de um vocabulário mais preciso.

> Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.
>
> É importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p.68-69).

Identifica-se, pois, uma preocupação na construção e significação[2] de conceitos. Vê-se ainda uma integração do conteúdo com a **Construção Geométrica**, sendo essa uma abordagem para o estudo das propriedades geométricas.

No mesmo bloco, isto é, **Espaço e Forma**, **Conceitos e Procedimentos**, está o que se espera dos alunos:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas.
- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.

2 Significação de conceitos: dar significado ao conceito. Essa abordagem é contraria àquela em que o aluno "decora" os conceitos, sem entender e sem dar significado a eles.

- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
- Composição e decomposição de figuras planas.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números .
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.(BRASIL, 1998, p.72-74).

Em **Conceitos e Procedimentos** para os alunos do 4º ciclo (7ª e 8ª séries), estão os que se referem a **Espaço e Forma**:

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.
- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.

- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 1998, p.72-74).

Como se pode observar, esse conteúdo sugerido nos PCN é bem completo e requer um esforço conjunto para ser trabalhado. Nos itens relacionadas para o 3º Ciclo e para o 4º Ciclo, a **Construção Geométrica** pode ampliar as possibilidades de criação de imagens mentais relacionadas à Geometria.

Ensino Médio

Para o Ensino Médio, os PCN destacam que a Matemática “tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.” (BRASIL, 2000, p.40).

No **PCN+ Ensino Médio**, no bloco **Geometria e Medidas**, encontram-se outras referências à importância da Geometria e aos elementos geométricos, suas propriedades e o trabalho com **Construções Geométricas** como um dos elementos construtores desse conhecimento.

O trecho a seguir traz orientações sobre a abordagem do trabalho com a Geometria.

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si.

Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. (BRASIL, 2002, p.123).

Pode-se observar ainda que existe uma preocupação constante com a dedução, a estruturação do pensamento, a resolução de problemas e a comunicação.

Esse domínio [do conhecimento matemático] passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e

> interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p.41-42).

Além disso, tem-se uma preocupação com a contextualização (fora e dentro da própria Matemática) e a interdisciplinaridade dos conceitos matemáticos. Sobre a Geometria especificamente destaca-se:

> as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p.44).

O conhecimento geométrico que se espera que os alunos construam é, portanto, complexo, denso e contextualizado, permitindo uma leitura de mundo e de situações. Para que isso aconteça, é fundamental a mudança de postura: deve-se sair da concepção de um conhecimento transmitido para a de um conhecimento construído.

Sugere-se, a seguir, a leitura de trechos dos PCN.



Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental de Matemática

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 15 abr. 2016.

Parâmetros Curriculares do Ensino Médio de Matemática

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 15 abr. 2016.

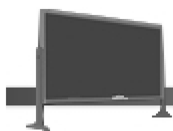
PCN+ do Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 15 abr. 2016.

Encerrando o tópico

Há algum tempo, ouvi, em uma palestra, que os professores eram privilegiados, pois tiveram experiência na sua área de atuação antes de se formarem profissionais. Isso lhes permitiu ter outro olhar, além do de professor. O mesmo não acontecia, por exemplo, com um médico cirurgião, pois ele podia atuar muito tempo sem sofrer uma cirurgia. O professor, com certeza, só se formou professor sendo anteriormente aluno.

Isso deveria ser uma referência muito forte para todos nós.



SALA DE AULA

Como foi sua relação com a Geometria e Construções Geométricas (ou Desenho Geométrico) no seu percurso escolar (do Ensino Básico ao Superior)?

Você já parou para pensar como pretende trabalhar esses assuntos?

CONCEPÇÕES QUE NOS NORTEARÃO

Procurando-se a palavra *concepção* no dicionário, encontra-se: “s. f. 1. Ato ou efeito de conceber ou gerar (no útero). 2. Ato de conceber ou criar mentalmente, produção da inteligência. 3. Fantasia, imaginação. 4. Ponto de vista; opinião” (MICHAELIS UOL).

Assim, para nós, neste tópico, *concepção* tem o sentido de *ponto de vista*. Portanto, estudando as construções geométricas, estamos partindo de determinado *ponto de vista*. A questão é: “**Qual ponto de vista ou quais pontos de vista**?”.

Ideia (conceito) x representação



ATENÇÃO

Neste momento, o propósito não é discutir os entes geométricos primitivos, mas esclarecer a relação *conceito x representação*. Os entes geométricos primitivos são estudados em um dos próximos tópicos, onde se abordam os traçados básicos das **Construções Geométricas**.

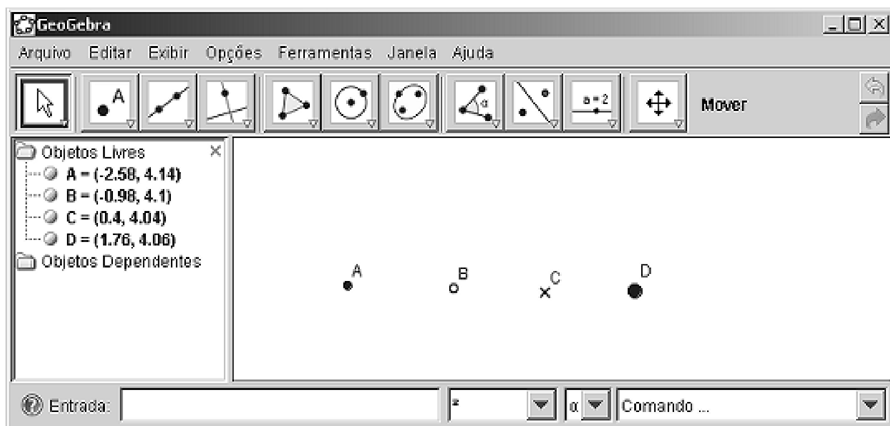
No livro **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**, José Carlos Putnoki refere-se aos entes primitivos da seguinte forma:

> Sempre que se dá a definição de um ente [geométrico], inevitavelmente nela comparecem outros, já supostamente conhecidos, já definidos. Assim, a definição de bissetriz só pode ser compreendida por alguém que conheça de antemão os conceitos de ângulo, semi-reta, vértice de ângulo, e também ângulos adjacentes e congruentes. Ora, as definições desses outros entes, por sua vez, apoiam-se em outras, também já supostamente estabelecidas, e assim sucessivamente, formando uma cadeia de conceitos onde cada um deles só pode ser definido a partir de outros que já o foram anteriormente. Evidentemente, numa cadeia assim, deve haver um primeiro conceito que, por não existir outro que o anteceda, não pode ser definido. Em Geometria, não há apenas um, mas sim três entes que constituem o início dessa cadeia. os quais, justamente por serem os primeiros, são chamados primitivos. Os entes geométricos primitivos são: o ponto, a reta e o plano (PUTNOKI, 1993, p.11).

Para quem estudou Geometria em vários momentos da vida e já possui experiência, dizer que esses entes não são definidos e que são aceitos assim é compreensível. Mas, e quando se vai trabalhar com alunos do Ensino Fundamental? Para eles é tão simples assim?

Nesses momentos procura-se fazer uma analogia para tentar levá-los a entender o que está sendo apresentando, seja um entre primitivo ou um conceito. Portanto, é preciso ter cuidado, pois muitos professores constroem o conceito de forma errônea, confundindo as vezes a representação do conceito com o próprio conceito. Confuso? Acho que nem tanto!

Veja o exemplo. O ponto é um elemento primitivo. Para representar um ponto, podemos usar uma marca numa folha de papel. Se uma pessoa estiver usando uma lapiseira de grafite 0,5 mm, o ponto vai sair menor que o *ponto* de um grafite 0,7 mm ou de um lápis. Num programa de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, o ponto pode ter várias formas, mas todas representam o ente geométrico ponto.



Tela do Geogebra com a representação de alguns pontos.

Podemos ainda perceber que a representação se altera, de acordo com a mídia utilizada: o quadro-negro e giz, papel e lápis ou a informática. Muitas vezes, de tanto representar um ente geométrico da mesma forma, cria-se uma associação representação-conceito que é errônea. Nesses casos trata-se de uma representação prototípica.



TAREFA

Dê uma paradinha na leitura. Esta atividade é importante para você entender a relação *representação-conceito*.

Pegue uma folha e desenhe um triângulo.

Provavelmente, seu desenho se encaixa, no mínimo, em um dos casos listados a seguir:

- Aproximou-se de um triângulo equilátero (os três lados iguais).
- É um triângulo acutângulo (os três ângulos internos são agudos).
- Um dos lados do triângulo está paralelo à borda da folha.

Acertei! As imagens ou representações particulares feitas para um conceito geométrico são chamados de *imagens prototípicas*.



Leia o texto do professor Paulo César da Penha apresentado no 16º COLE na UNICAMP, Campinas/SP. Ele analisa uma atividade desenvolvida com seus alunos sobre a desigualdade triangular, aparecendo, em vários momentos, a interferência das imagens prototípicas na construção dos conceitos relacionados ao triângulo.

PENHA, Paulo César da. **A desigualdade triangular em diferentes mídias**. IN: Anais do 16° COLE. Campina: ALB, 2007. Disponível em: <http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_03.pdf>. Acessado em: 15 mai. 2012.

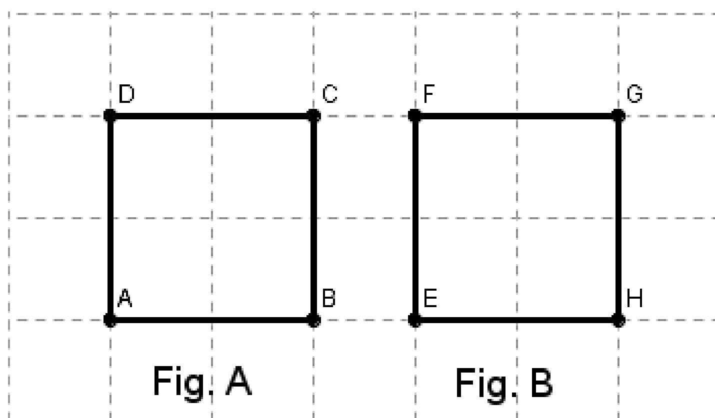
Construção estática x Construção dinâmica

Tradicionalmente as *construções geométricas* são feitas com o uso de régua não graduada e compasso. Mas, como a intenção é ir além das construções geométricas reproduzidas por meio de roteiro, passo a passo, vamos aproveitar os demais instrumentos: esquadros e transferidor. A intenção é construir um conhecimento geométrico, por isso, mais que fazer a construção é importante discutir a construção.

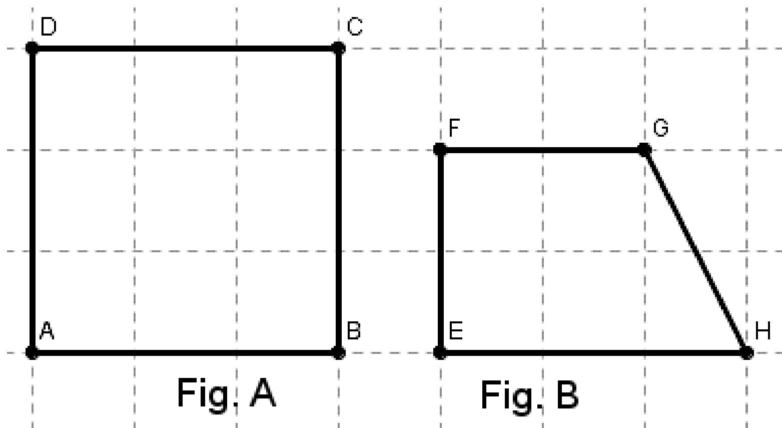
Assim, concordo com Jesus (2008, p.76-77), pois entendo que, ao trabalhar com **Construções Geométricas**, deve-se: (a) mostrar o que se faz, ou seja, realizar a construção geométrica; (b) explicar por que se fez, ou seja, justificar se a resposta obtida é, de fato, a resposta procurada; (c) discutir a solução verificando o número de soluções-problema e analisando se ele é realmente compatível, se existe apenas uma, se pode haver mais de uma solução e sob quais condições se poderia ampliar ou reduzir o número de soluções.

As construções feitas com estes instrumentos (compasso, régua, esquadros e transferidor), independentemente da abordagem adotada pelo professor, têm em comum a característica de serem construções estáticas, fixas. Com a inserção de novas tecnologias no ensino da Matemática, novos padrões são incluídos. Ao se usarem os programas de Geometria Dinâmica, por exemplo, o Cabri-Géomètre e o GeoGebra, passa-se a ter construções dinâmicas. Cria-se, assim, a possibilidade de arrastar pontos, e, se a construção obedece às propriedades geométricas estabelecidas, ela pode se deformar, mas continua a ser a solução desejada.

Observe as figuras a seguir.



As figuras **A** e **B** são aparentemente iguais. Porém, ao arrastar-se o ponto ***A*** para a esquerda, a figura **A** se deformou, mantendo as propriedades do quadrado. E ao se arrastar o ponto ***H*** para a direita, a figura **B** se deformou, perdendo as propriedades do quadrado.





O fator de diferença para o processo educativo não é apenas o conjunto de instrumentos usados, mas fundamentalmente a ação e a postura do professor.

As Construções Geométricas numa abordagem de resolução de problemas

As construções geométricas podem ser encaradas como verdadeiros quebra-cabeças: temos algo a ser construído e as peças disponíveis são poucas, porém o perfeito arranjo delas pode permitir chegar à solução.

José Carlos Putnoki, em um dos tópicos de seu livro, diz que "o Desenho Geométrico é classificado como desenho resolutivo, pois através dele, determinam-se respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica" (PUTNOKI, 1993, p.9). Podemos então, trabalhar com as construções geométricas na perspectiva da Resolução de Problemas.

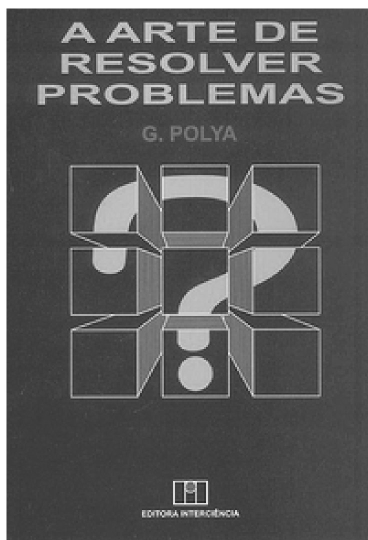


O que vamos ver sobre *Resolução de problemas* é um recorte muito pontual com uma visão bem simplificada dessa metodologia.

Neste semestre, você está cursando a disciplina **Seminário III -Resolução e formulação de problemas como abordagem metodológica para o ensino da Matemática**, em que será aprofundado o olhar sobre o assunto.

Um matemático que desenvolveu um trabalho que virou referência na resolução de problema é o húngaro George Polya, com o livro **A Arte De Resolver Problemas**, em que a solução está dividida em quatro partes:

1. Compreender o problema;
2. Estabelecer um plano;
3. Executar o plano;
4. Fazer o retrospecto da solução alcançada.



A intenção de estabelecer passos que facilitem a resolução de um problema não é a de engessar o processo ou de criar uma fórmula-padrão, um algoritmo, a ser seguido, mas sim de ajudar os iniciantes nesta arte a organizar as informações, relacioná-las e direcionar o foco para o problema.

Na etapa de "Compreender do problema", deve-se procurar esmiuçá-lo , relacionar os dados fornecidos, destacar o que é pedido, ordenar as informações, se for possível, fazer um desenho que ajude a entender o problema, adotar uma notação para ser usada durante a busca da solução.

Na etapa "Estabelecer um plano" de ação é necessário estabelecer relações entre os dados e o problema proposto, buscar soluções existentes ou soluções que se aproximem do problema.

Uma vez estabelecido um plano, é necessário "Executar o plano". Em cada passo, deve-se, se possível, verificar sua validade. Dificilmente se acerta na primeira tentativa. Assim, durante a execução, pode-se observar que o caminho escolhido não foi bom, ficando obrigado a retornar à etapa de planejamento. É importante ficar atento aos erros, pois muitas vezes, analisando-os, encontramos dicas preciosas para o acerto.

Quando se acha a solução, faz-se necessário "Fazer o retrospecto da solução alcançada", recapitulando os passos de solução, organizando as ideias básicas utilizadas e procurar uma validação e finalizar o processo, de preferência, por meio de um texto.

Os problemas de **Construções Geométricas** podem ser apresentados de diversas formas, explorando as propriedades dos elementos geométricos, suas relações com a linguagem geométrica, a linguagem corrente, a linguagem visual, o pensamento argumentativo e o conceito geométrico.

Construções Geométricas e as Mídias: a estruturação do saber mediada pelos instrumentos

Normalmente, o termo mídia é entendido como um suporte ou meio para uma mensagem. Daí ser associado aos meios de comunicação, como televisão, rádio ou Internet. Mas, nesta disciplina, usa-se o termo mídia no sentido atribuído por Benedetti (2003, p.11), ou seja, algo que vai além da simples ideia de suporte. Portanto vamos incorporar ao universo da mídia os elementos materiais (concretos) que estão à nossa volta, como os materiais didáticos (calculadora, materiais manipulativos, papel, caneta, compasso, régua, computador, programas de informática etc.) e os elementos mais sutis, como a oralidade e a escrita.

Segundo Borba e Vilarreal (2005) e Borba e Penteado (2005) forma-se com as mídias um coletivo pensante que nos transforma em *seres humanos-com-mídia*. Assim, os pensamentos passam a se reorganizar a partir desta interação. Com essa abordagem, forma-se um coletivo-pensante com os instrumentos de trabalho: régua, compasso, transferidor, esquadros e computador com o *software*. É preciso, pois, tentar entender a relação dessas mídias na construção do conhecimento matemático, mais especificamente do conhecimento geométrico.

Para Pais (2006), a “aprendizagem da Matemática envolve o desafio de elaborar articulações entre as dimensões teórica e experimental, valorizando generalidade, abstração, particularidade e a materialidade dos recursos didáticos” (p. 93). Assim, o autor, analisando a influência das mídias na aprendizagem de Geometria, apresenta alguns elementos envolvidos neste processo.

Um deles é o objeto que o autor relaciona com a parte material, facilmente identificável no mundo físico. Pode-se entendê-lo como os materiais didáticos ou modelos físicos que podem ser manipulados pelo aluno, como figuras geométricas recortadas em papelão. Porém, como o próprio autor alerta, não se pode crer que, pelo simples fato de manipular o

objeto, o aluno seja capaz de apreender o conceito. Por isso, faz-se necessária a intervenção pedagógica do professor, transformando, assim, o processo numa experiência raciocinada (idem, p.67).

Outro elemento é o desenho, que é classificado pelo autor como sendo ainda de natureza concreta. Esse recurso didático representa uma figura geométrica e pode-se considerá-lo como uma representação conceitual mais complexa do objeto, porém ainda concreta. Imaginemos o desenho de um quadrado ou de qualquer outra figura. Ela é mais complexa que o recorte da figura, pois não é possível movê-la, senti-la, mas não é abstrato. Apesar de o *desenho* levar a pensar nas propriedades da figura geométrica que ele representa, como o quadrado, não se pode afirmar que as propriedades estão garantidas na figura, mesmo porque é praticamente impossível ter um ângulo de 90º certinho, medidinho, como é necessário. Ao nos referirmos à introdução da informática como mídia, neste contexto, podemos mudar algumas características do *desenho*. Usando programas de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, o desenho passa a ser mais do que a representação da figura geométrica, pois incorpora as propriedades da figura e, por meio do movimento dos pontos, podemos verificar a garantia de manutenção dessas propriedades, como a perpendicularidade ou o paralelismo entre retas, o ponto sobre um objeto, ou a congruência de ângulos e/ou segmentos.

Por achar que é um diferencial significativo, acrescento aos dois elementos propostos por Pais um novo que denomino de desenho dinâmico (ou construção dinâmica). A partir da manipulação dos objetos, das figuras e/ou das figuras dinâmicas, é possível criar outro elemento relacionado à aprendizagem geométrica, a imagem mental. “Se por um lado, tais imagens estão mais próximas da abstração, por outro lado distanciam-se dos conceitos pelo seu aspecto subjetivo” (PAIS, 2000, p. 4), faltando, portanto, a estruturação do pensamento dedutivo e a garantia de definições e conceitos. O aspecto subjetivo das imagens mentais é associado à forma como cada indivíduo interpreta e se relaciona com suas experiências

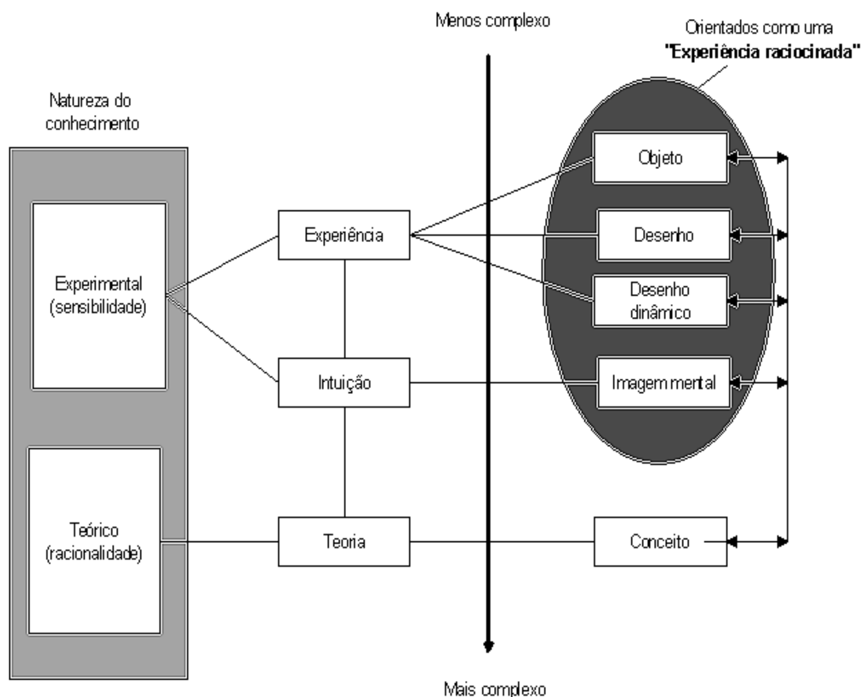
matemáticas, permitindo que cada um crie sua própria galeria e ainda que essas imagens sejam continuamente modificadas e depuradas.

Com o estabelecimento de uma relação entre os elementos do objeto, desenho e desenho dinâmico (representantes do mundo físico) e a imagem mental (representante do mundo abstrato), por meio de uma *experiência raciocinada*, pode-se construir o *conceito geométrico*, que só passa a ter sentido se tiver um certo formalismo. Explica Pais (1996, p. 71),

> é evidente que do ponto de vista científico, o conceito não pode ser algo susceptível a modificações subjetivas que permitam diferentes significados. Mas, enquanto conhecimento é construído pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes.

O outro aspecto do conhecimento geométrico é a intuição, uma forma de conhecimento que não requer uma dedução racional, pois está no espírito da pessoa. Ela é "relativa aos conhecimentos acumulados pelo sujeito portador dessa intuição" (PAIS, 2006, p. 101). Um exemplo dessa forma de conhecimento é o axioma, que, em uma definição geral, é considerado uma verdade evidente por si mesma. Essa forma de conhecimento tem uma forte ligação com a imagem mental. Segundo Davis e Hersh (1995), a intuição "é o efeito da mente de certas experiências de actividade ou manipulação de objetos concretos (mais tarde, de marcas num papel ou mesmo de imagens mentais)" (p. 366).

Além da experiência e da intuição, finalmente, está a teoria, que se utiliza dos aspectos conceituais para o convencimento ou verificação da proposição.



Partindo desses pressupostos e da estrutura apresentada por Pais (1996, p. 71-72), apresenta-se a figura com um diagrama interpretativo que relaciona os três aspectos do conhecimento geométrico: experiência, intuição e teoria. Para o autor, na experiência a pessoa usa os objetos e os desenhos para verificar uma proposição geométrica.



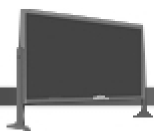
SAIBA MAIS

Assim, sugiro que você leia o texto **Intuição, experiência e teoria geométrica**, do professor Luiz Carlos Pais.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Zetetiké. Vol. 4. N. 06. Unicamp. Campinas. 1996. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2664/2405>. Acessado em: 17 mar. 2016.

Encerrando o tópico

Fecha-se, mais um tópico do nosso curso, esperando que tenham ficado claras as bases para esta proposta de trabalho da disciplina. Como é "Pratica de Ensino", a fundamentação é muito importante, pois nela está apresentada uma forma de pensar o ensino de Geometria e de fazer a ponte com as **Construções Geométricas**. E estão fundamentadas as concepções que nos norteiam.



SALA DE AULA

Em uma sala de Ensino Fundamental qual destes instrumentos é o melhor: o compasso com a régua, os esquadros, o transferidor ou computador com o software? Por quê?

UMA BREVE REVISÃO SOBRE ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA



De maneira geral, acreditamos que todos os alunos que estejam cursando uma licenciatura em Matemática já tenham estudado Geometria no Ensino Fundamental e/ou no Ensino Médio. Porém, a experiência tem nos mostrado que se faz necessário revisar, mesmo que de maneira breve, alguns elementos básicos dessa área.

Alguns dos assuntos que veremos aqui serão novamente abordados em tópicos mais adiante com um pouco mais de profundidade ou com outro enfoque.

Todos os elementos geométricos fundamentam-se em três entes chamados *primitivos* que não possuem definição: o *plano*, o *ponto* e a *reta*. Começaremos nossa breve revisão com eles e depois nos estenderemos para outros.

Para entendê-los melhor devemos começar por assumir que eles não existem no plano físico. O que podemos fazer é uma representação ou uma aproximação diante da dificuldade de tratá-los no plano das abstrações. Como afirma o Prof. Jorge Henrique de Jesus Berredo Reis no

seu material didático de Desenho Geométrico, "é através de modelos comparativos que tentamos explicá-los" (REIS, 2006, p.9)

Plano

O *plano* é o ambiente no qual se constrói a geometria e assume-se que ele é constituído por pontos e retas (PENEIREIRO; SILVA, 2008, 13). Podemos compará-lo com uma folha de papel ou um tampo de mesa, porém devemos acrescentar que o *plano* é infinito. Na geometria nomeamos o plano com letras gregas minúsculas, como α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta) ou λ (lâmbida).

Ponto

O *ponto* não tem dimensão, não tem medida. Quando se desenha um ponto em uma folha, no quadro ou na tela do computador o que se faz é uma *representação do ponto*. Se não entendermos dessa maneira teríamos pontos grandes, quando são feitos no quadro com o giz, e pontos pequenos, quando são feitos na folha com uma lapiseira. Para nomear o ponto usa-se letra maiúscula, como ***A***, ***B***, ***C*** ou ***M***.

Toda construção geométrica começa por um *ponto*, mesmo que implicitamente, como quando se enuncia "dado uma reta ***r***". Ao se usar programas de Geometria Dinâmica esse princípio fica mais evidente.

Em Construções Geométricas pode-se ter pontos iniciais da construção, pontos sobre um objeto e pontos gerados pela interseção de dois objetos.

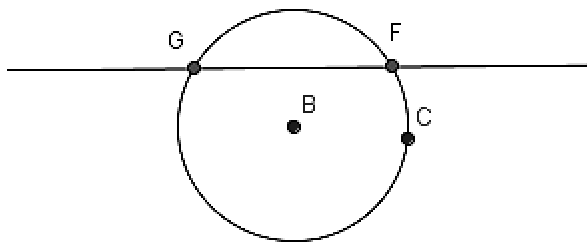


Figura 1[3]**:** exemplos de pontos

Na **Figura 1** tem-se o ponto ***B***, centro da circunferência; o ponto ***C***, ponto sobre a circunferência ou pertencente à circunferência; e, os pontos ***F*** e ***G*** que são pontos na interseção da reta com a circunferência.

Reta

A *reta* é um conjunto infinito de pontos. Ela é nomeada por uma letra minúscula, por exemplo ***a***, ***b***, ***r***, ***s*** ou ***t***. Para se traçar uma reta são necessários dois pontos. No exemplo da **Figura 2** tem-se uma reta ***s*** definida pelos pontos ***A*** e ***B***.



Figura 2: exemplo de reta

Outra forma de nomear a reta seria explicitando os dois pontos que pertencem a ela. Ainda no nosso exemplo poder-se-ia dizer a reta ***AB***.

3 Nesse tópico do guia usaremos legendas nas figuras para facilitar o relacionamento do conteúdo com a mesma. Nos demais tópicos, pela quantidade de imagens, não manteremos esse padrão.

Uma reta ***r***, em um plano α, divide esse plano em dois *semiplanos*: α' e α''.

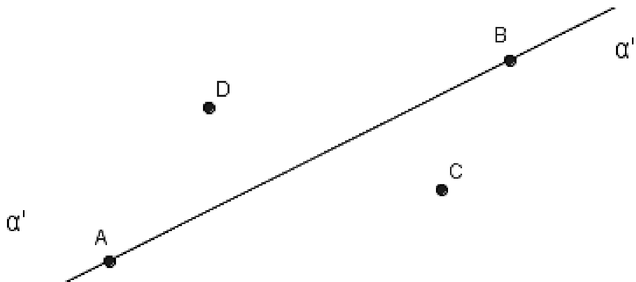


Figura 3: exemplo de semiplanos

No exemplo da **Figura 3** temos o plano α dividido em dois semiplanos, α' e α'', pela reta ***AB***. O ponto ***C*** está contido no semiplano α'' e o ponto ***D*** está contido no semiplano α'.

Ao se colocar pontos sobre a reta ou ao se destacar pontos da reta, passamos a ter subconjuntos dessa reta. A *semirreta* é um subconjunto da reta que tem sua origem em um ponto e não possui um ponto de destino.

A região de uma reta compreendida entre dois de seus pontos define outro elemento geométrico: o *segmento de reta*. Outra forma de se entender o segmento de reta é como o conjunto de pontos compreendidos entre os dois pontos extremos.



Figura 4: exemplo de subconjuntos da reta

Observando a figura 4 e tomando como referência o ponto $\boldsymbol{O}$ temos duas semirretas: (1) a semirreta ***OA***, que pode ser representada $\overrightarrow{OA}$; e, (2) a semirreta ***OB***, que pode ser representada como $\overrightarrow{OB}$. Além das semirretas temos alguns segmentos de retas: segmentos ***AO***, ***OB*** e ***AB*** que também podem ser representados como $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

Em relação a um mesmo plano, as posições das retas podem ser:

- **Paralelas:** quando duas retas não possuem pontos em comum;
- **Coincidentes:** quando duas retas possuem mais de um ponto em comum;
- **Concorrentes:** quando duas retas possuem um ponto em comum. As retas perpendiculares são um exemplo de retas concorrentes (o ângulo formado entre elas medem 90º).

Ângulo

Pode-se definir *ângulo* como a região do plano compreendida entre duas semirretas não opostas que têm o ponto de origem comum. Assim, tem-se o ângulo interno e o ângulo externo.

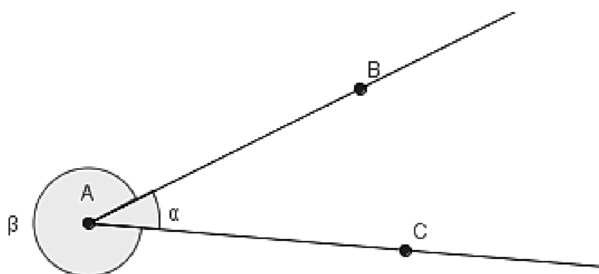


Figura 5: exemplo de ângulos

Tomando como referência a **Figura 5** tem-se o ponto ***A***, vértice do ângulo e as semirretas ***AB*** e ***AC***, lados do ângulo.

As notações usadas para identificar ângulo pode ser: (1) uma letra grega minúscula (α, β etc.); (2) o ponto do vértice com um acento circunflexo $\hat{A}$; ou (3) os pontos que pertencem aos lados e o vértice, sendo que o vértice assume a posição central com ou sem o acento circunflexo: $B\hat{A}C$ ou ***BAC***.

Tem-se dois tipos de ângulos: (1) o *ângulo interno*, no nosso exemplo, o ângulo α; e (2) o *ângulo externo*, no nosso exemplo, o ângulo β.

O ângulo é classificado de acordo com sua medida:

- **Raso:** se sua medida é igual a 180º;
- **Nulo:** se sua medida é igual a 0º;
- **Reto:** se sua medida é igual a 90º;
- **Agudo:** se sua medida é maior que 0º e menor que 90º;
- **Obtuso:** se sua medida é maior que 90º e menor que 180º.

Polígonos

Os polígonos são figuras geométricas que frequentemente aparecem nos problemas de construções. Por isso, acho válido revermos algumas de suas propriedades.

Pode-se definir polígono como uma figura fechada, formada por segmentos de retas, que constituem os lados da figura. O encontro dos segmentos formam os *vértices*, os ângulos internos e os ângulos externos.

Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados. O quadro a seguir, apresenta alguns polígonos:

Número de lados	Classificação
3	Triângulo ou trilátero
4	Quadrângulo ou quadrilátero

5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octogóno

Quadro 1: nome dos polígonos.
Fonte: Dolce, Pompeo (1997, p.135)

São elementos dos polígonos: (a) lados; (b) vértices; (c) ângulos internos; (d) ângulos externos; e, (e) diagonais. Os polígonos são identificados pela sequência dos pontos que o formam.

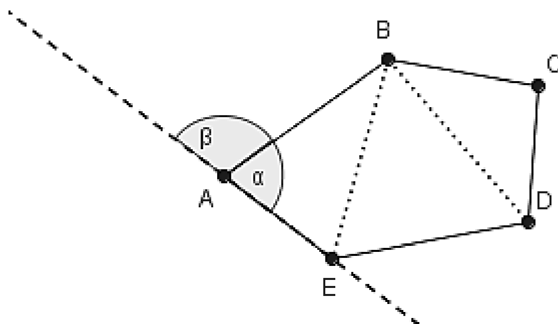


Figura 6: exemplo dos elementos de um polígono

Tomando como referência a **Figura 6**, tem-se o polígono ***ABCDE*** que tem como lados os segmentos de reta ***AB***, ***BC***, ***CD***, ***DE*** e ***AE***. Nele, estão representadas duas de suas diagonais: ***BE*** e ***BD***. Um de seus ângulos internos é o ângulo α e um dos seus ângulos externos é o ângulo β.

Os polígonos podem ser convexo e não convexo (côncavo). Pode-se dizer que um polígono é convexo "se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n-2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina" (DOCE, POMPEO, 1997, p. 127).

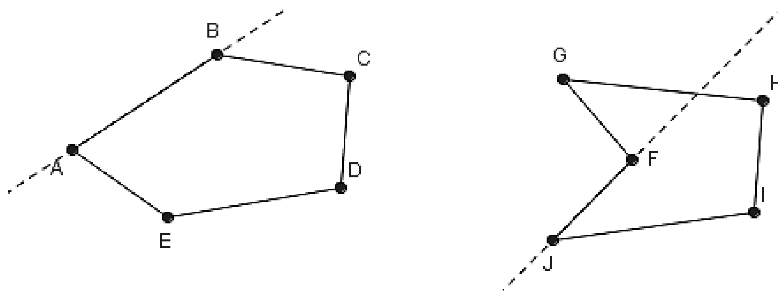


Figura 7: exemplos de polígonos convexo e não convexo (côncavo)

Tomando como referência a definição acima e a **Figura 7** pode-se afirmar que o polígono ***ABCDE*** é um polígono convexo e o polígono ***FGHIJ*** é um polígono não convexo (côncavo).

Os polígonos convexos podem ser *equiláteros* (quando possuem todos os lados como mesma medida), *equiângulos* (quando possuem os ângulos internos com mesma medida), *regulares* (quando são equiláteros e equiângulos) ou *irregulares* (quando não são nem equiláteros e nem equiângulos).

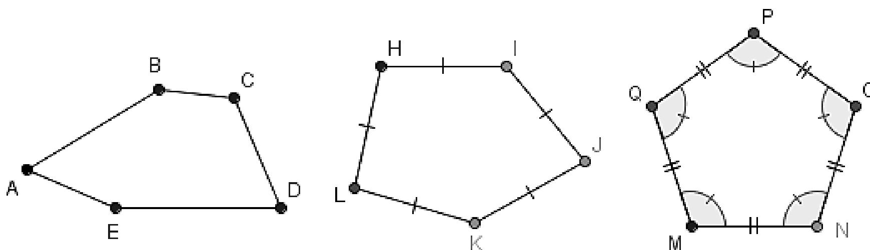


Figura 8: exemplos de alguns polígonos convexos

Baseando-nos na **Figura 8** e nas informações contidas em cada um dos polígonos podemos afirmar que o polígono ***ABCDE*** é um polígono convexo irregular (ou não regular), que o polígono ***HIJKL*** é um polígono equilátero (observe as marcas idênticas sobre os seus lados) e que o polígono ***MNOPQ*** é um polígono regular (observas as marcas sobre seus lados e em seus ângulos internos).



Nas Construções Geométricas não podemos nos basear na "aparência visual" dos objetos. Quando fazemos uma construção, para afirmar algo sobre ela, é necessário justificar, provar ou demonstrar que as propriedades que estamos afirmando são verdadeiras matematicamente.

Circunferência

A circunferência pode ser definida como

> o conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância é o raio da circunferência (DOLCE, POMPEO, 1997, p.147).

Frequentemente, alunos confundem *circunferência* com *círculo*. Por isso, aproveitaremos para vermos, também, a definição de círculo.

> Círculo (ou disco) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado é menor ou igual a uma distância (não nula) dada. (…) O círculo é a reunião da circunferência com seu interior (DOLCE, POMPEO, 1997, p.149).

Alguns elementos da circunferência estão ilustrados na **Figura 9**, a seguir.

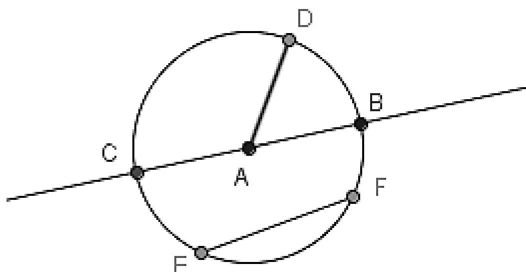


Figura 9: exemplos de elementos de uma circunferência.

O ponto ***A*** é o *centro* da circunferência. O segmento ***AD*** é um dos *raios* da circunferência e o segmento ***EF*** é uma de suas *cordas*. A maior corda de uma circunferência é aquela que passa pelo seu centro e é chamada de *diâmetro*. O diâmetro divide a circunferência em duas *semicircunferências*. Na **Figura 9**, o diâmetro é representado pelo segmento ***CB***.

Tomando-se dois pontos pertencentes à circunferência e que não sejam os extremos de um diâmetro, na **Figura 9** podemos tomar os pontos ***D*** e ***B***, tem-se (1) o arco menor ***DB*** ($\widehat{DB}$) que é a reunião dos pontos ***D***, ***B*** e todos os demais pontos da circunferência que estão no interior do ângulo ***DAB***; e, (2) o arco maior ***DB*** ($\widehat{DB}$) que é a reunião dos ***D***, ***B*** e todos os pontos da circunferência que estão no exterior do ângulo ***DAB.***

É importante relembramos também as posições de algum objetos geométricos em relação à circunferência.

Se tomarmos duas circunferências elas podem estar, uma em relação à outra: (1) **internas** (sem ter pontos em comum); (2) **internas e tangentes** (tendo apenas um ponto em comum); (3) **secantes** (tendo dois pontos em comum); (4) **externas e tangentes** (tendo apenas um ponto em comum); e, (5) **externas** (sem ter pontos em comum). Essas posições relativas estão ilustradas na figura 10.

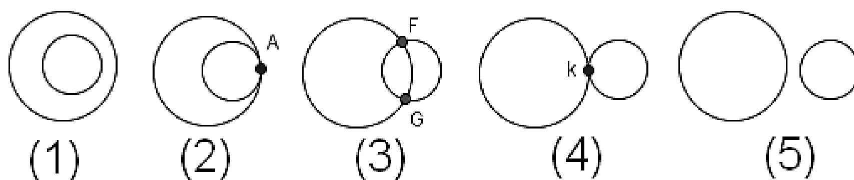


Figura 10: exemplos de posições relativas de duas circunferências.

Posições semelhantes podem ocorrer entre uma circunferência e uma reta e uma circunferência e um segmento de reta, porém nesse último dependendo do seu tamanho e do raio da circunferência pode-se ter apenas um ponto de interseção sem que ele seja o ponto de tangência.

Lugar geométrico

> A expressão (muito antiga) lugar geométrico, nada mais é que um conjunto de pontos e, para definir tal conjunto, devemos enunciar uma propriedade que esses pontos devem ter. Se essa propriedade é *p*, o conjunto dos pontos que possuem *p* é o lugar geométrico da propriedade *p*. (WAGNER, 2009, p.16)

Existem alguns lugares geométricos que são usados recorrentemente nas construções geométricas, por isso, o estudo de suas propriedades tornam-se importantes.

Circunferência

> O lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância de um ponto dado é a circunferência que tem centro nesse ponto e raio igual a uma distância dada (PUTNOKI, 1993, p. 67).

Portanto, qualquer ponto pertencente a uma circunferência, está à mesma distância do centro. Se unirmos qualquer ponto pertencente à circunferência com o ponto que é o centro da circunferência teremos um dos raios da circunferência, como vimos anteriormente.

No exemplo da **Figura 11**, temos uma circunferência ***c*** de centro ***O***. Os pontos ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** e ***E*** pertencem à circunferência. Os segmentos ***OA***, ***OB***, ***OC***, ***OD*** e ***OE*** são congruentes (têm a mesma medida), pois são raios da mesma circunferência.

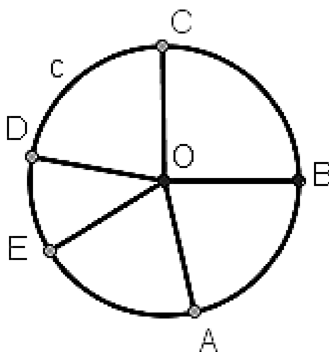


Figura 11: exemplos de raios de uma circunferência

Em Construções Geométricas, o instrumento que traça circunferências é o *compasso*.

Uma técnica muito usada para transportar medidas de segmento de reta é fazer a abertura do compasso na medida do segmento e depois criar uma circunferência (ou parte dela) no local desejado.

Exemplo de construção: Dado um segmento de reta ***OP*** criar um triângulo ***ABC*** equilátero de lado ***OP***.

1) Abrir o compasso na medida ***OP***.	2) Marcar um ponto ***A*** qualquer e traçar uma circunferência ***c*** com centro em ***A*** e raio ***OP***.
3) Marcar um ponto ***B*** sobre a circunferência ***c*** e com a mesma abertura de compasso. 4) Traçar, com a mesma abertura de compasso, uma circunferência ***d*** com centro em **B** (ou traçar uma circunferência ***d*** com centro em ***B*** e que passe por ***A***)	5) Unir os pontos ***A***, ***B*** e ***C*** por segmentos de retas.

Mediatriz

"O lugar geométrico dos pontos que equidistantes de dois pontos **A** e **B** dados é a mediatriz do segmento ***AB"*** (PUTNOKI, 1993, p. 71), ou ainda segundo Wagner (2009, p. 18) "a mediatriz de um segmento ***AB*** é a reta perpendicular a ***AB*** que contém o seu ponto médio".

Na **Figura 12**, a seguir, a reta r é a mediatriz do segmento ***AB***. Todos os pontos sobre essa reta (por exemplo, ***C***, ***D***, ***F***, ***G*** e ***M***) estão à mesma distância dos pontos ***A*** e ***B***. Assim, os segmentos ***AC=BC***, os segmentos ***AD≡BD***, os segmentos ***AF≡BF***, os segmentos ***AG≡BG*** e os segmentos ***AM≡BM***.

Observe que o ponto ***M*** é a interseção da reta ***r***, *mediatriz* de ***AB***, com o segmento ***AB***, ou seja, ele pertence ao segmento ***AB*** e à reta ***r.*** Ele é o ponto médio de ***AB***.

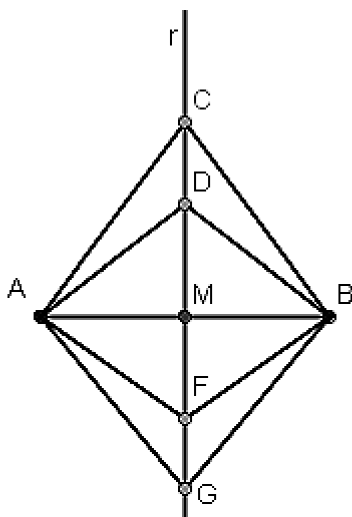
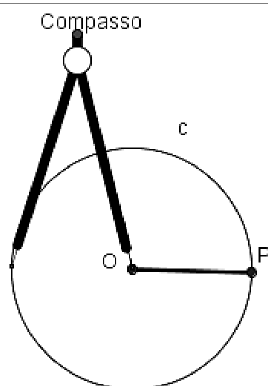
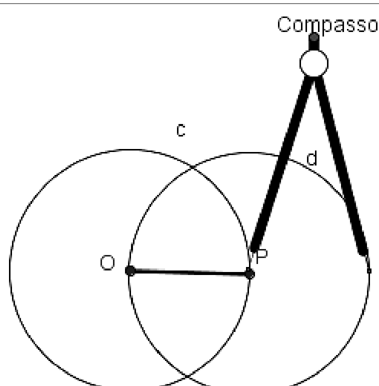
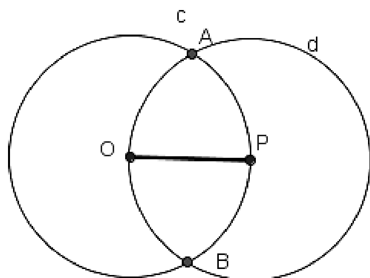
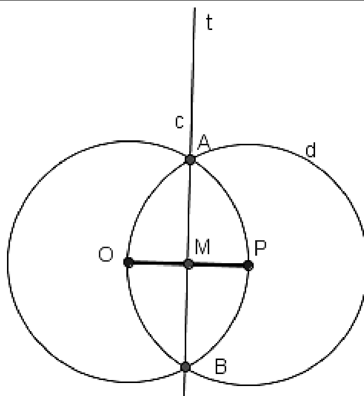


Figura 12: mediatriz do segmento ***AB***

<u>**Exemplo 1 de construção**</u>: Dado um segmento de reta ***OP*** traçar sua mediatriz e achar seu ponto médio.

 1) Traçar uma circunferência ***c*** com centro em ***O*** e raio ***OP*** (uma outra forma de escrever seria traçar uma circunferência ***c*** com centro em ***O*** e que passe por ***P***).	 2) Traçar uma circunferência ***d*** com centro em ***P*** e raio ***PO*** (uma outra forma de escrever seria traçar uma circunferência ***d*** com centro em ***P*** e que passe por ***O***).
 3) Marcar os pontos ***A*** e ***B*** nas interseções das circunferências ***c*** e ***d***.	 4) Unir por uma reta ***t*** os pontos ***A*** e ***B***. Essa é a mediatriz do segmento ***OP***. 5) Marcar o ponto ***M*** na interseção da reta ***t*** com o segmento ***OP***. Esse é ponto médio de ***OP***.



PARE E PENSE

Você observou que nessa construção os elementos-chaves foram as circunferências de mesmo raio. Como você justificaria essa construção a partir o lugar geométrico *circunferência*?

Para garantir a equidistância de seus pontos com os extremos do segmento a mediatriz, obrigatoriamente, tem que formar um ângulo de 90º com o segmento de reta.

Então, a mediatriz tem propriedades importantes que a tornam chave para várias construções:

1ª) Perpendicularidade: sempre que precisamos traçar uma reta perpendicular a uma reta ou a um segmento.

2ª) Conter os pontos equidistantes de dois pontos: sempre que precisamos de construções que precisam dessa propriedade (construção de paralelogramos, triângulos isósceles, trapézios isósceles etc...) e de traçarmos o ponto médio (dividir um segmento em 4 partes).

Bissetriz

> Lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes, ***a*** e ***b***, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contém as bissetrizes dos ângulos determinados por ***a*** e ***b*** (PUTNOKI, 1993, p. 84).

A **Figura 13**, a seguir, ilustra essa definição.

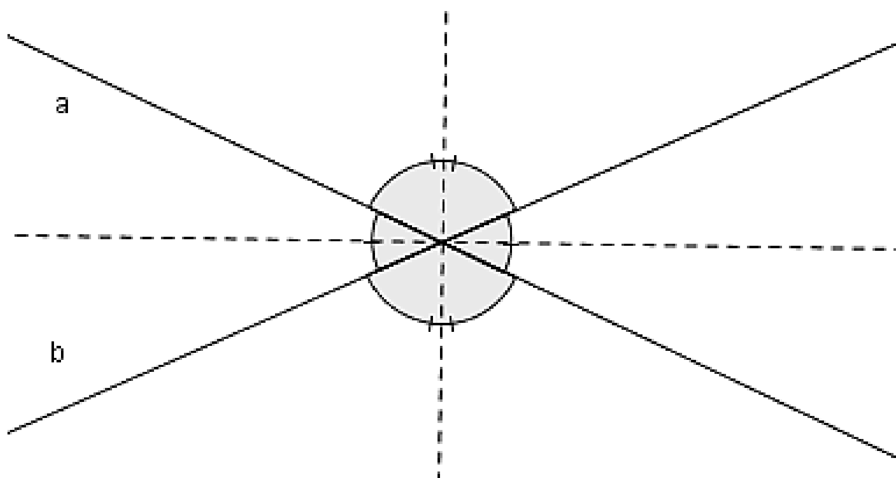


Figura 13: bissetrizes dos ângulos formados pelas retas ***a*** e ***b***

Nas construções geométricas é muito comum o aluno tomar a distância da bissetriz às retas que formam o ângulo sem ser perpendicularmente a essas retas.

Observe a **Figura 14**. O ângulo α, formado pelas semirretas ***AB*** e ***AC*** é dividido ao meio pela reta ***c***, sua bissetriz. O ponto ***P***, pertencente à reta ***c***, é equidistante das duas semirretas.



ATENÇÃO

A distância do ponto ***P*** à semirreta ***AB*** e do ponto ***P*** à semirreta ***AC*** é sempre feita perpendicularmente às semirretas passando pelo ponto ***P***.

A expressão "*distância de um ponto a uma reta*" (semirreta ou segmento de reta) **sempre** se refere "à menor distância" e **sempre** é feita tomando-se a reta perpendicular à reta referenciada e que passa pelo ponto.

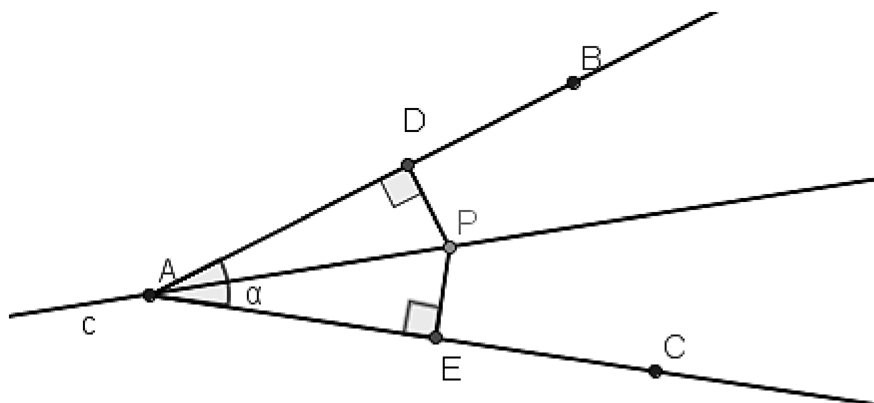


Figura 14: bissetriz de um ângulo



SAIBA MAIS

Caso você tenha dúvidas ou necessite relembrar outros conceitos sugiro como leitura complementar:

- Fundamentos da Matemática Elementar – volume 9 - Geometria. Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. Editora Atual.
- Fascículo Geometria básica – CEDERJ – volume 1 – módulo 1. Dirceu Uesu Pesco e Roberto Geraldo Tavares Arnaut.
- Fascículo Geometria básica – CEDERJ – volume 1 – módulo 1. Edson Luiz Cataldo Ferreira, Francisco Xavier Fontenele Neto e Isabel Lugão Rios.

ELEMENTOS BÁSICOS: DAS DEFINIÇÕES ÀS PRIMEIRAS CONSTRUÇÕES

A Matemática é conhecida como uma ciência que não permite dupla interpretação. Por isso, começa-se definindo os elementos básicos, para, a partir deles, ir estruturando a discussão. Vamos adotar essa estratégia e definir alguns elementos básicos para nosso trabalho. Além disso, vamos conhecer os instrumentos que utilizaremos e começar a fazer algumas construções com eles.

Os entes geométricos

Entes geométrico são os "seres que habitam o mundo geométrico" (PUTNOKI, 1993, p. 11). Você já conhece esses entes, no mínimo, pela breve revisão que fizemos no capítulo anterior. Vamos revê-los, porém inserindo-os dentre de um contexto mais prático na nossa disciplina, associando-os às construções e ao uso dos instrumentos que utilizaremos.

Ponto

É considerado um ente primitivo, ou seja, não é necessário defini-lo. Mesmo assim, Euclides (1944, p.4) o define como aquele que não tem partes ou o que não tem grandeza. Sua representação pode ser uma marca feita com a ponta do lápis numa folha de papel.

Em uma construção geométrica, pode haver alguns tipos de pontos:

- **Ponto livre:** é aquele que pode ser colocado em qualquer lugar do plano (toda construção inicia-se com um ponto livre).
- **Ponto sobre o objeto:** é aquele que possui a propriedade de estar sobre um objeto ou ente geométrico. Por exemplo: ponto sobre uma reta, ponto sobre uma circunferência, ponto sobre um segmento de reta etc.
- **Ponto na interseção:** é aquele que é marcado na interseção de dois ou mais entes geométricos. Por exemplo: na interseção de duas retas, de uma circunferência com um segmento de reta etc.

Esses tipos de pontos tornam-se muito importantes, quando se fazem construções em programas de Geometria Dinâmica, como o Geogebra.

Reta, semirreta e segmento de reta

A reta, outro ente primitivo, é conceituado por Euclides (1944, p.4) como sendo o que tem comprimento sem largura.

Nas construções geométricas, a reta é definida por dois pontos e estende-se ao infinito, por isso não se pode medir seu comprimento.

A semirreta[4] inicia-se num ponto e passa pelo segundo, estendendo-se ao infinito. Portanto, assim como a reta, não é possível determinar seu comprimento.

4 Pelo Acordo Ortográfico, passou-se a escrever **semirreta**, antes se escrevia **semi-reta**. Quando estivermos transcrevendo textos de outros autores ou quando estivermos nos referindo a menus do GeoGebra, usaremos a grafia dada originalmente (semi-reta) .

O segmento de reta é um “pedaço” de reta compreendido entre dois pontos, podendo, assim, ser medido.

Circulo, circunferência e arco

Segundo Euclides,

> Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.
>
> O dito ponto se chama centro do círculo.
>
> Diâmetro do círculo é uma linha reta, que passa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circunferência.
>
> Semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro. (EUCLIDES, 1944, p.5).

O arco é uma parte da circunferência compreendida entre dois pontos.

Nas construções geométricas, o compasso é o instrumento de traçar circunferência. A propriedade de manter a mesma distância do centro aos pontos que compõem a circunferência é muito útil quando se fazem as construções.

Ângulo

Podem-se encontrar várias definições para ângulo, dependendo do ponto de análise: retas ou região do plano. Vamos assumir a definição encontrada no livro **Fundamentos da Matemática Elementar – Geometria Plana**: “[...]chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares)” (DOLCE, POMPEO, 2005, p. 20).



SAIBA MAIS

Para avivar a memória, leia, no livro do CEDERJ **Geometria Básica**, volume 1, módulo 1, a Aula 1 – Noções elementares.

Nossos instrumentos

Normalmente, em livros e aulas de **Construções Geométricas** só se permite usar o compasso e a régua. O primeiro, para traçar circunferências e arcos, e a régua, para traçar retas. A partir desses elementos, são feitas todas as construções.

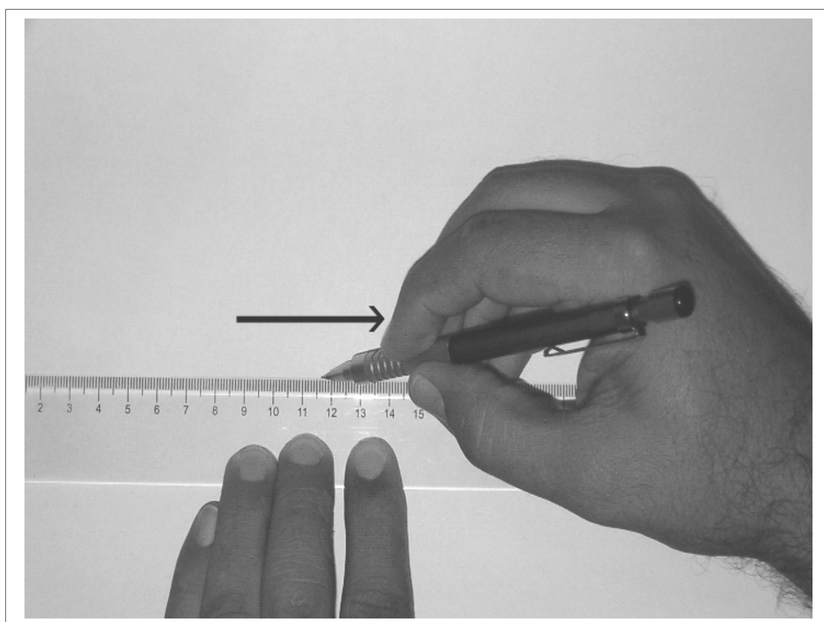
Como foi dito anteriormente, nosso objetivo é usar as **Construções Geométricas** para a construção do conhecimento geométrico. Por isso, vamos incorporar o transferidor (para medir ângulos), os esquadros e o computador com o programa Geogebra.

Formas de uso

Como já foi dito, a régua é usada basicamente para o traçado de retas. Como vamos trabalhar também com esquadros, ela, em alguns momentos, servirá de apoio a eles.

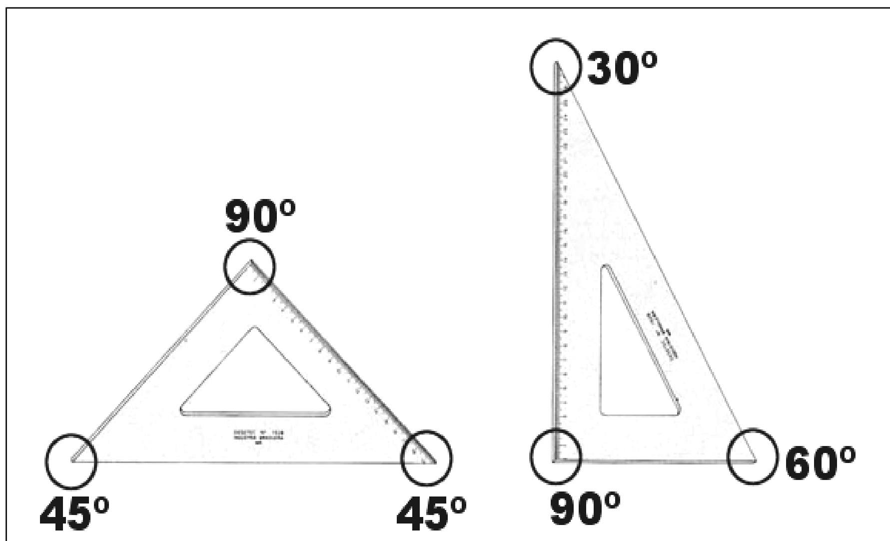
No traçado de retas, devem-se tomar alguns cuidados:

- o lápis deve ser puxado, e não empurrado;
- o grafite do lápis deve ficar o mais próximo possível da guia da régua;
- o lápis deve estar sempre bem apontado, pois isso melhora a precisão do desenho.

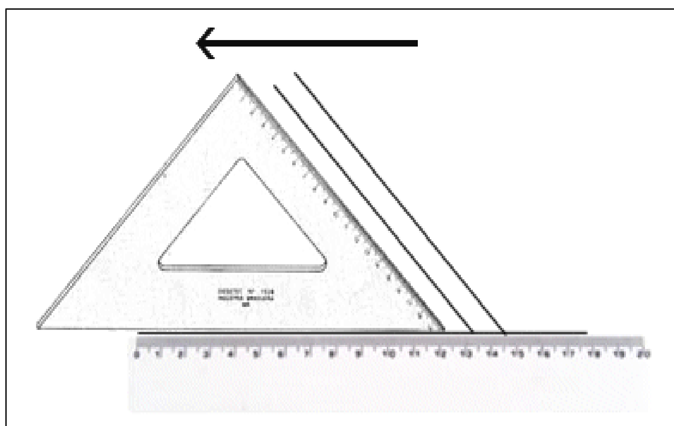


Neste curso, usamos os esquadros como uma forma de ganhar tempo de construção e também de criar outras experiências, explorando suas propriedades.

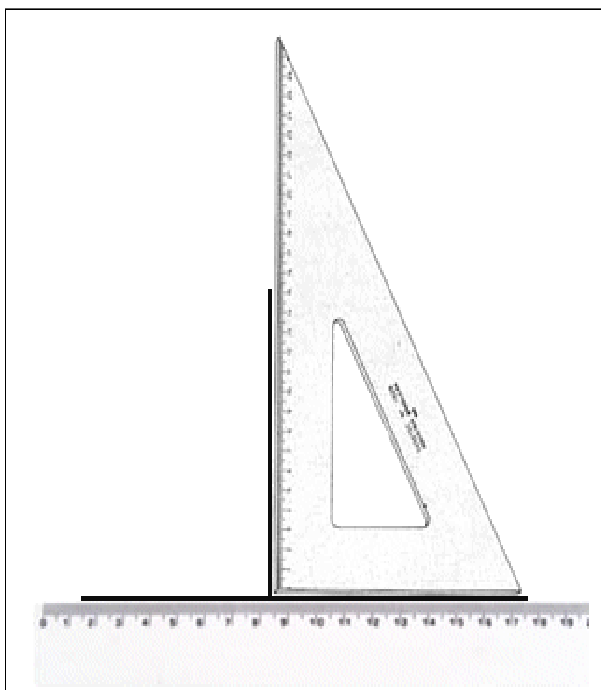
Normalmente são dois e possuem medidas diferentes de ângulos: um possui um ângulo de 90º e dois ângulos de 45º, o outro, um ângulo 90º, um ângulo de 60º e um ângulo de 30º.



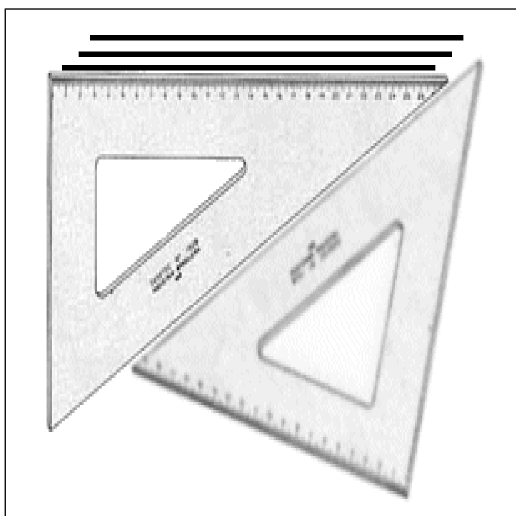
A seguir, veja alguns exemplos de traçados de retas usando os esquadros e régua.



Retas paralelas com inclinação de 45º

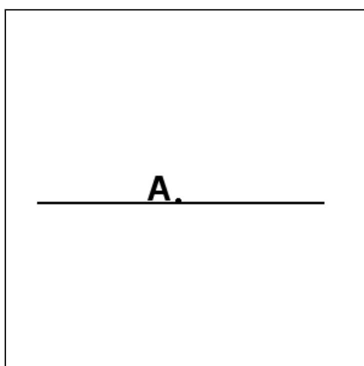


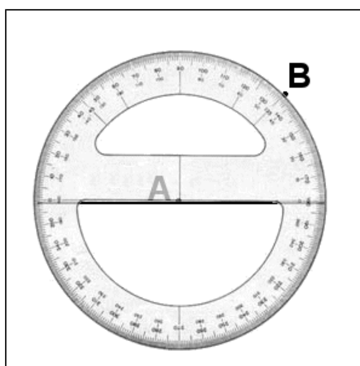
Retas perpendiculares

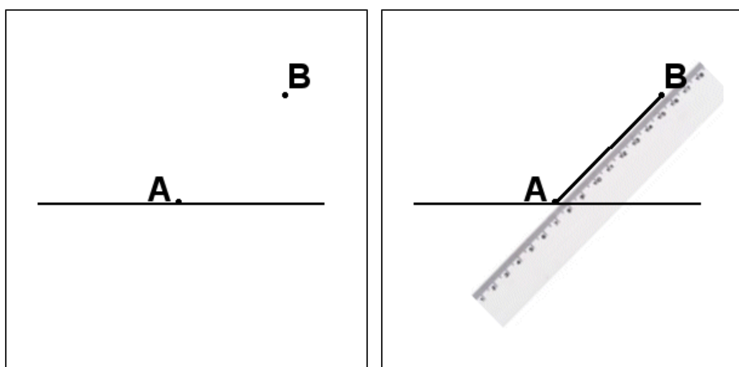

Retas paralelas

O transferidor permite traçar ou marcar ângulos. Com ele podemos explorar diversas construções a partir das propriedades vinculadas a essas medidas.

Vale lembrar que, para trabalhar com o transferidor, deve-se usar uma reta suporte como referência e o vértice do ângulo deve estar sobre a marca de referência do centro do transferidor.







O compasso, é sem dúvida, o grande "ator" em nossa "peça". Como já foi dito, sua função básica é traçar circunferência. Mas, a partir dessa propriedade, recebe uma série de funções, como transportar medida de segmento e de ângulo.

O compasso possui duas pontas: a *ponta seca*, responsável por fixá-lo no papel, é o centro de giro; a outra ponta com o grafite, lápis ou caneta, é responsável por fazer a linha.



Algumas construções básicas com uso de mídias



ATENÇÃO

- Nestas construções, vamos utilizar os passos da heurística de George Pólya para resolução de problemas.

- Na execução das construções, vamos usar esquadros e régua e, em seguida, o software GeoGebra. Dessa forma, vamos fazer um paralelo entre as construções nessas mídias.

1) Dado um segmento *AB*, achar o ponto médio, utilizando esquadro e régua.

Vamos começar pelos passos da heurística de Pólya:

a) **Compreender o problema:**

É dado um segmento de reta e, usando régua e esquadro, deve-se achar seu ponto médio.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

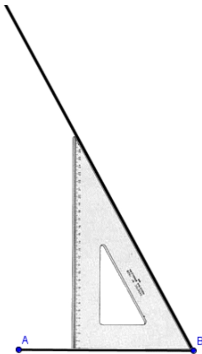
(1) O ponto médio de um segmento divide-o em dois outros de mesmo valor.

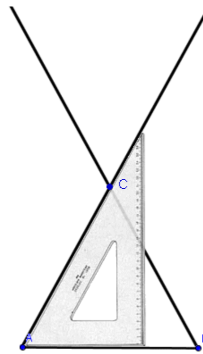
(2) O ponto médio de um segmento pertence a uma reta chamada **mediatriz do segmento**, que tem a propriedade de conter todos os pontos que equidistam dos pontos extremos do segmento.

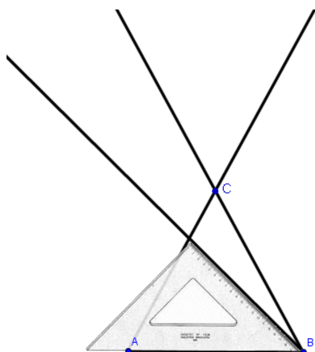
(3) A **mediatriz de um segmento** forma com ele um ângulo de 90º.

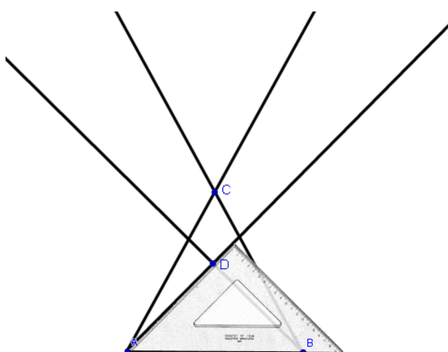
(4) Os ângulos formados entre os segmentos de reta que unem os pontos extremos do segmento aos pontos pertencentes à mediatriz são congruentes. Portanto um bom plano é traçar dois pares de semirretas (***AC*** e ***BC***; ***AD*** e ***BD***), sendo que os ângulos ***BAC*** e ***ABC*** são congruente, assim como os ângulos ***BAD*** e ***ABD***.

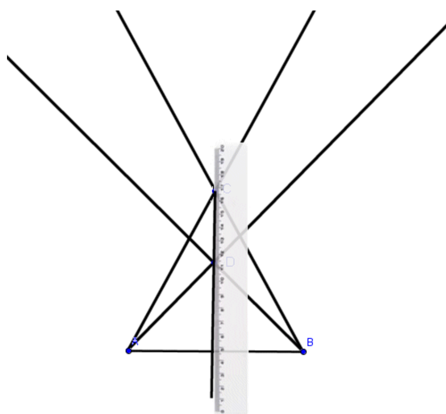
c) <u>Executar o plano:</u>

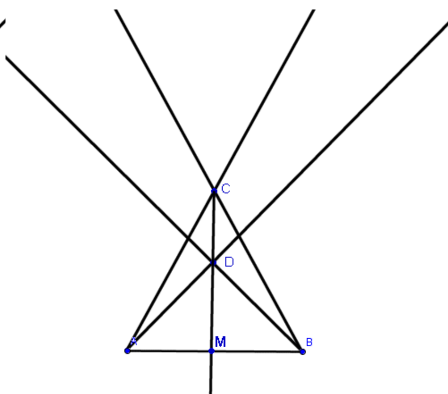












d) <u>Fazer o retrospecto da solução alcançada:</u>

1) Traçou-se uma semirreta, partindo de ***B***, que formou um ângulo de 60º com ***AB***. Repetiu-se a operação, partindo do ponto ***A***.

2) Marcou-se o ponto ***C*** na interseção das duas semirretas.

3) Traçou-se uma semirreta, partindo de ***B***, que formou um ângulo de 45º com ***AB***. Repetiu-se a operação, partindo do ponto ***A***.

4) Marcou-se o ponto ***D*** na interseção das duas semirretas.

5) Uniram-se por reta os pontos ***C*** e ***D***. Essa reta é a mediatriz do segmento ***AB***.

6) Na interseção da reta ***CD*** com o segmento ***AB***, marcou-se o ponto ***M***, que é o ponto desejado.

A justificativa para a construção foi apresentada no passo b da heurística: o ponto médio de ***AB*** pertence à mediatriz do segmento ***AB***, que possui a propriedade de conter os pontos que equidistam dos pontos ***A*** e ***B***. O traçado da mediatriz foi garantido pelo uso dos mesmos ângulos para os pares de semirretas que partem dos pontos ***A*** e ***B***.

2) Dado um segmento *AB*, achar seu ponto médio, utilizando o *software* GeoGebra e simulando o uso dos esquadros e da régua

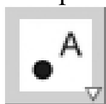


Apesar de saber que o GeoGebra possui uma quantidade muito grande de ferramentas, nesta construção nos limitaremos ao uso das ferramentas que simulam os esquadros e a régua.

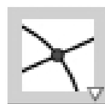
QUADRO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE “ESQUADROS E RÉGUAS” E AS FERRAMENTAS DO GEOGEBRA			
INSTRUMENTOS	**USO**	**FERRAMENTA DO GEOGEBRA**	
Régua	Construir retas, semirretas e segmentos de reta		Reta definida por dois pontos
			Semirreta definida por dois pontos
			Segmento de reta definido por dois pontos
Esquadros	Marcar os ângulos de 30º, 60º, 45º e 90º		Ângulo com amplitude fixa

Usamos também estas ferramentas do GeoGebra:

Novo ponto

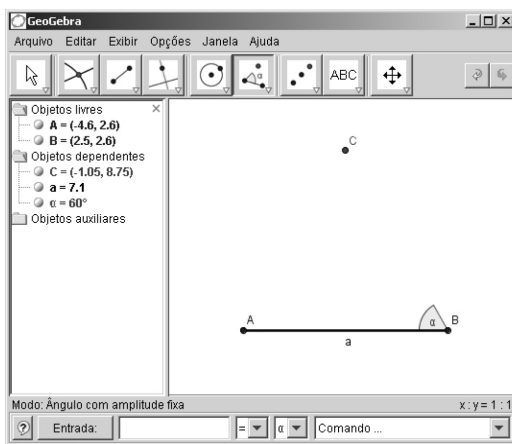


Interseção de dois objetos

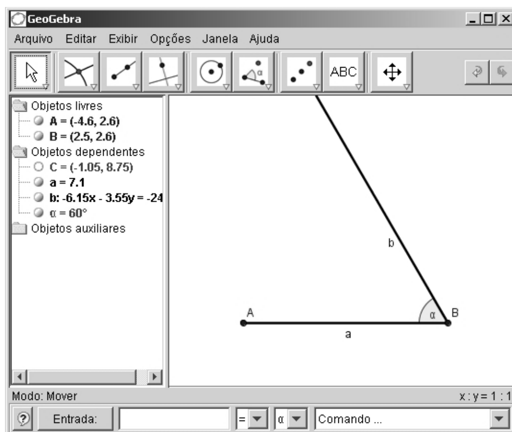


1) Criar um segmento de reta ***AB***

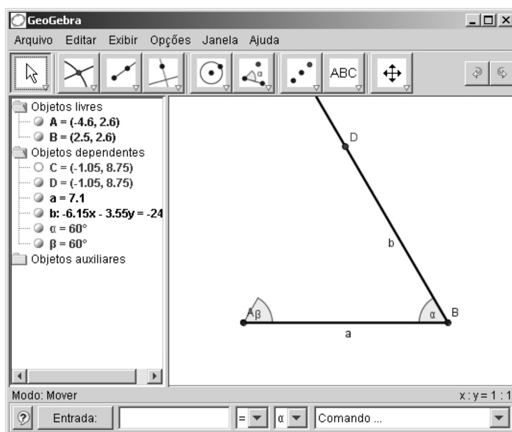
2) Clicar no ponto ***A***, com a ferramenta **Ângulo de amplitude fixa** ativada. Clicar, em seguida, no ponto ***B***, vértice do ângulo. Digitar 60º, na janela de medida do ângulo, e escolher o sentido horário (*clockwise*).



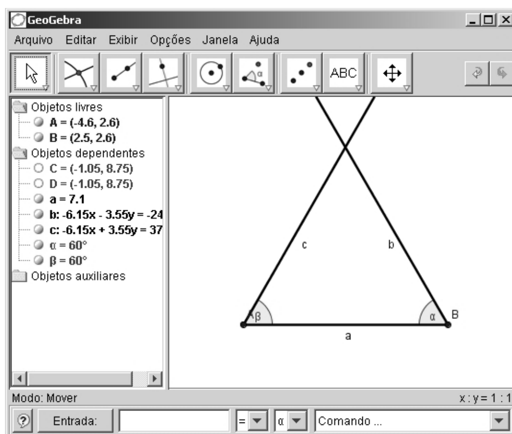
3) Unir, por semirreta, usando a ferramenta **Semi-reta definida por dois pontos** ativada, os pontos ***B*** e ***C***. Em seguida, ocultar o ponto ***C***.



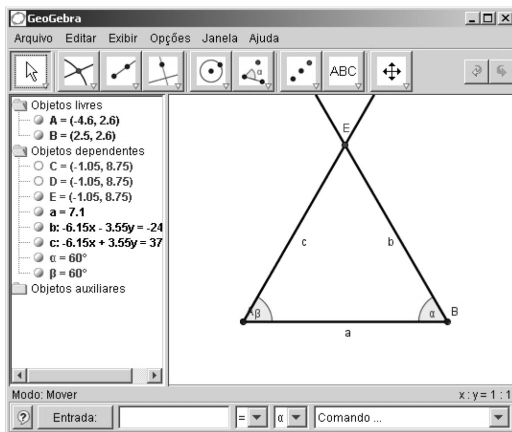
4) Clicar, a ferramenta **Ângulo de amplitude fixa** ativada, o ponto ***B*** e, em seguida, no ponto ***A***, vértice do ângulo. Na janela de medida do ângulo digitar 60º e escolher o sentido anti-horário (counter *clockwise*).



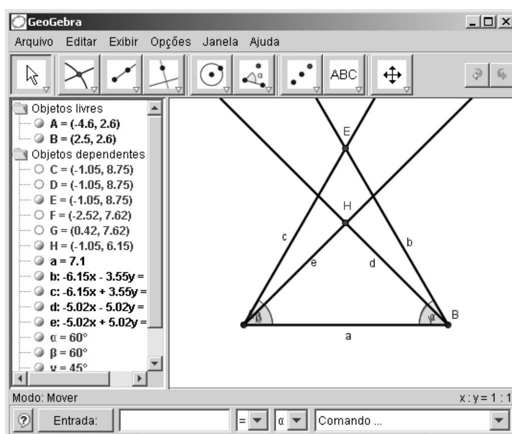
5) Unir, por semirreta, usando a ferramenta **Semi-reta definida por dois pontos** ativada, os pontos ***A*** e ***D***. Em seguida, ocultar o ponto ***D***.



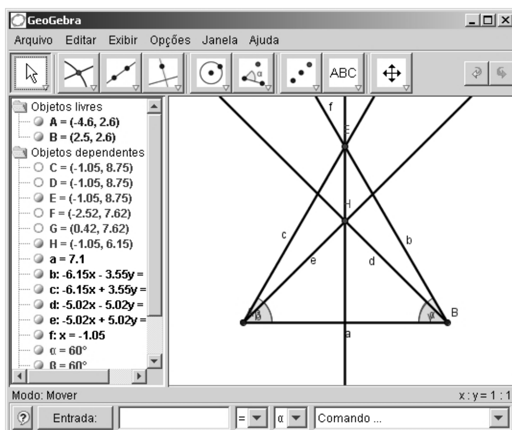
6) Clicar, com a ferramenta **Interseção de dois objetos** ativada, nas semirretas para marcar o ponto ***E***, na interseção das duas.



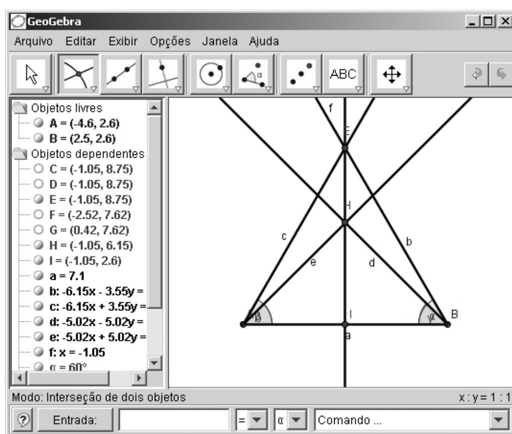
7) Repetir os itens de 2 a 6, informando o valor de 45º para os ângulos.



8) Unir por reta os pontos ***E*** e ***H*** (pontos gerados respectivamente pela interseção das semirretas do ângulos de 60º e das semirretas dos ângulos de 45º).



9) Clicar, com a ferramenta **Interseção de dois objetos** ativada, na reta ***EH*** e no segmento ***AB*** para marcar o ponto ***I***, na interseção desse dois elementos.
O ponto ***I*** é o ponto médio de ***AB***.



Você deve ter observado que, com o GeoGebra, conseguimos reproduzir a forma de trabalhar com os esquadros e régua ou nos aproximamos bastante dela.

Mesmo usando outra mídia e, consequentemente, mobilizando outros conhecimentos, os elementos geométricos envolvidos na construção e a justificativa para os usos são os mesmos.



PARE E PENSE

1. Como você faria essa construção utilizando somente uma régua e um esquadro que possui os ângulos de 45º e 90º?

2. E usando uma régua e o transferidor?

3) Dado um segmento *AB*, achar o ponto médio, utilizando régua e compasso.

Vamos retornar à heurística de Pólya:

a) <u>Compreender o problema:</u>

É dado um segmento de reta e, usando régua e compasso, deve-se achar o ponto médio.

b) <u>Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):</u>

1) O ponto médio de um segmento divide o segmento em dois de mesmo valor.

2) O ponto médio de um segmento pertence a uma reta chamada mediatriz do segmento, cuja propriedade é conter todos os pontos que equidistam dos pontos extremos do segmento.

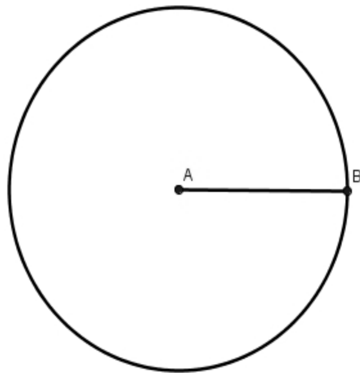
3) O compasso é usado para traçar circunferências.

4) A circunferência tem a propriedade de manter a mesma distância do seu centro aos pontos que a formam ;

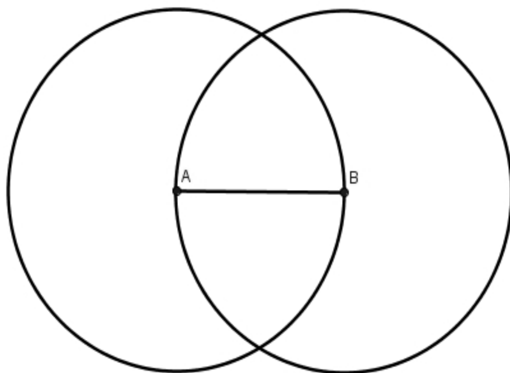
5) Duas circunferências de mesmo raio que se interceptam, gerando dois pontos, apresentam a mesma distância desses pontos aos centros.

c) <u>Executar o plano:</u>

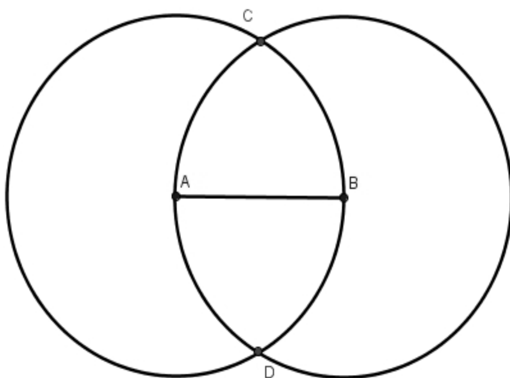
1) Criar, com centro no ponto ***A***, uma circunferência que passe pelo ponto ***B*** (raio ***AB***).



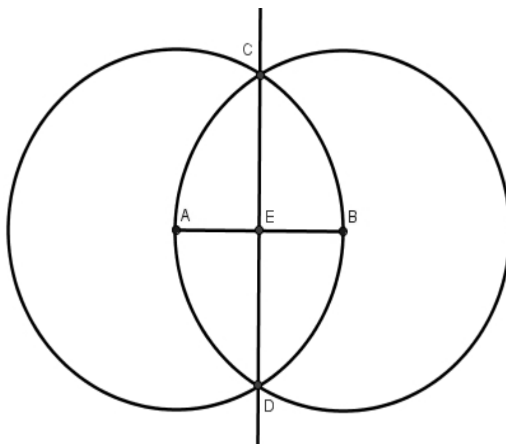
2) Criar, com centro no ponto ***B***, uma circunferência que passe pelo ponto ***A*** (raio ***AB***).



3) Marcar os pontos ***C*** e ***D*** nas interseções das circunferências.



4) Unir por reta os pontos ***C*** e ***D*** . Na interseção dessa reta com o segmento ***AB***, marcar o ponto ***E***, que é ponto médio de ***AB***.



d) Fazer o retrospecto da solução alcançada.

A retrospectiva da solução foi incorporada na execução da etapa c citada anteriormente.

4) Achar o ponto médio de um segmento *AB*, dado, utilizando o software GeoGebra, simulando o uso do compasso e da régua.

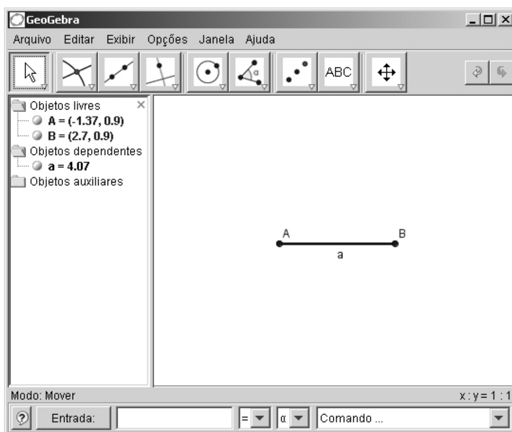


Novamente nos limitamos ao uso das ferramentas do GeoGebra. Desta vez, utilizando aquelas que simulam o compasso e a régua.

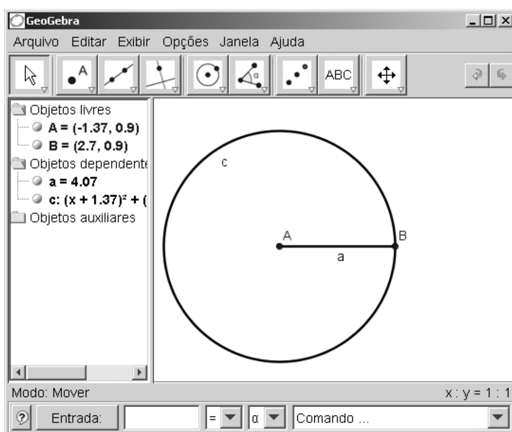
<table>
<tr><th colspan="4">QUADRO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE O "COMPASSO" E AS FERRAMENTAS DO GEOGEBRA</th></tr>
<tr><th>INSTRUMENTO</th><th>USO</th><th colspan="2">FERRAMENTA DO GEOGEBRA</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Compasso</td><td rowspan="3">Construir circunferências e arcos.</td><td></td><td>Círculo definido pelo centro e um de seus pontos</td></tr>
<tr><td></td><td>Compasso</td></tr>
<tr><td></td><td>Arco circular, dado o centro e dois pontos</td></tr>
</table>

Apesar de existirem outras ferramentas relacionadas à circunferência, damos mais ênfase a essas. À medida que você for tendo mais domínio do GeoGebra, deve experimentá-las, mas sempre lembrando que é importante saber por que está usando determinada ferramenta.

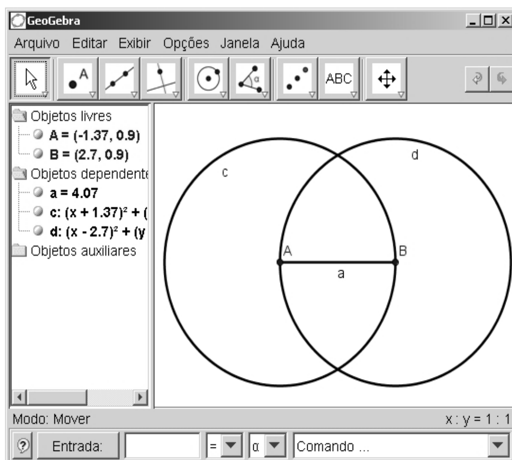
1) Criar um segmento de reta ***AB***



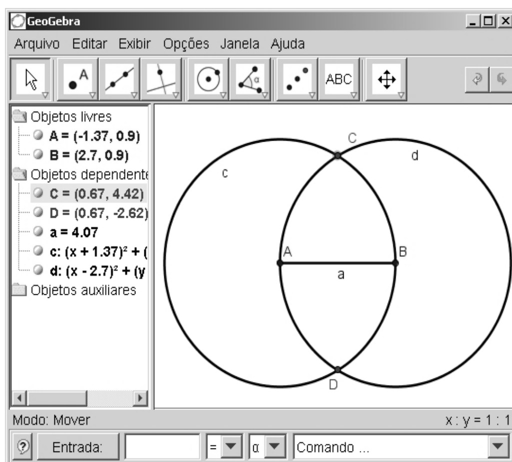
2) Criar, com a ferramenta **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos** ativada, uma circunferência ***c*** com centro em ***A***, que passe pelo ponto ***B*** (raio ***AB***).



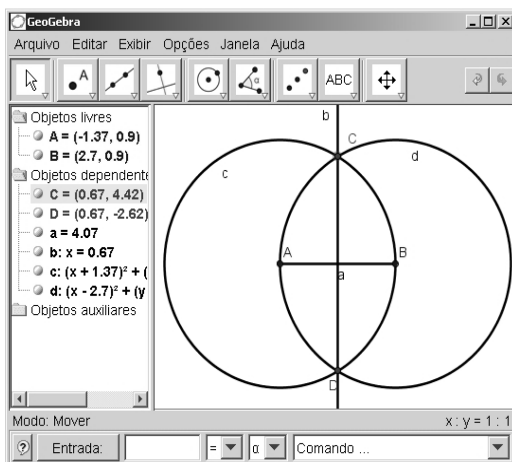
3) Criar, com a ferramenta **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos** ativada, uma circunferência ***d*** com centro em ***B*** que passe pelo ponto ***A*** (raio ***AB***).



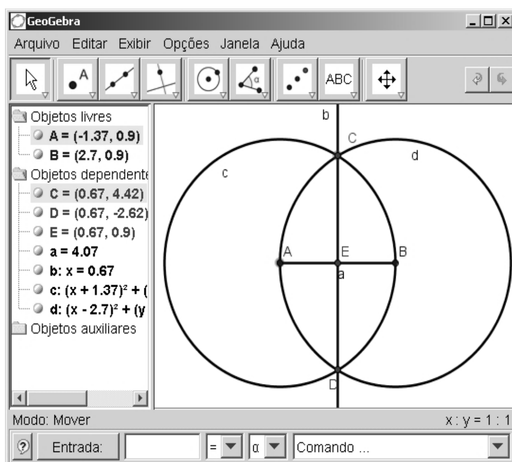
4) Clicar, com a ferramenta **Interseção de dois objetos** ativada, nas circunferências ***c*** e ***d***, para criar os pontos ***C*** e ***D*** em suas interseções.



5) Unir por reta os pontos ***C*** e ***D*** (pontos gerados respectivamente pela interseção das circunferências ***c*** e ***d***).



6) Clicar, com a ferramenta **Interseção de dois objetos** ativada, na reta ***CD*** e no segmento ***AB*** para marcar o ponto ***E***, na interseção desses dois elementos.
O ponto ***E*** é o ponto médio de ***AB***.



5) Dado um segmento *MO*, diagonal menor de um losango, construir o losango *MNOP* cuja a diagonal maior seja 2x*MO*, utilizando compasso e régua.

Vejamos a heurística de Pólya.

a) Compreender o problema:

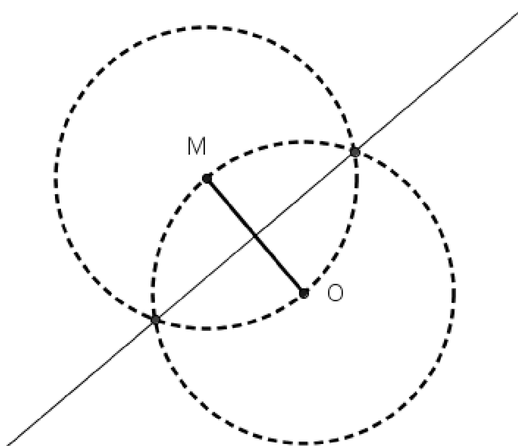
É dado um segmento de reta, que é a diagonal menor de um logando, e, usando compasso e régua, deve-se construir um losango cuja a diagonal maior é o dobro da diagonal menor.

b)Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):

1) Losango é um paralelogramo que
   - possui os quatro lados com a mesma medida;
   - possui 2 diagonais (diagonal maior e diagonal menor) perpendiculares que se cruzam nos pontos médios.
2) A diagonal maior está sobre a mediatriz da diagonal menor.
3) Considerando a diagonal menor como raio de uma circunferência, pode-se afirmar que o diâmetro é o dobro da diagonal menor.

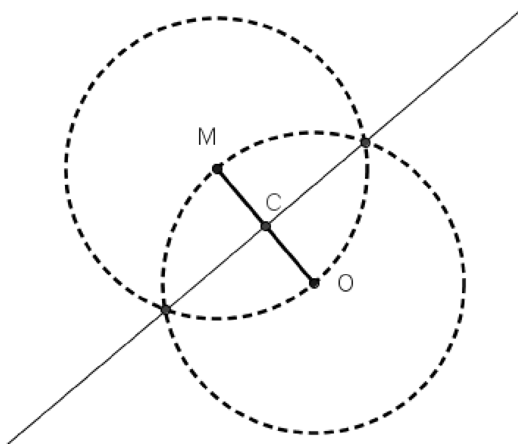
c)Executar o plano:

1) Traçar a mediatriz do segmento ***MO***.

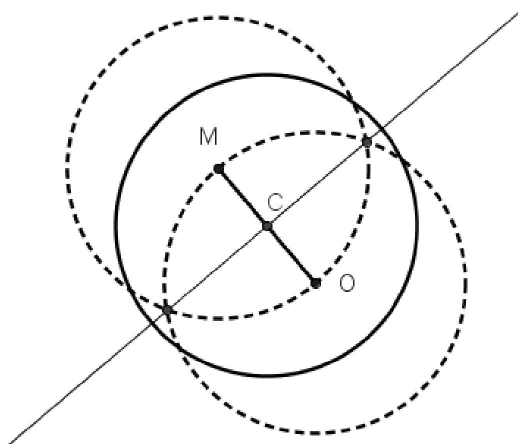


ATENÇÃO
As circunferências estão em tracejado para facilitar a visualização nas próximas figuras.

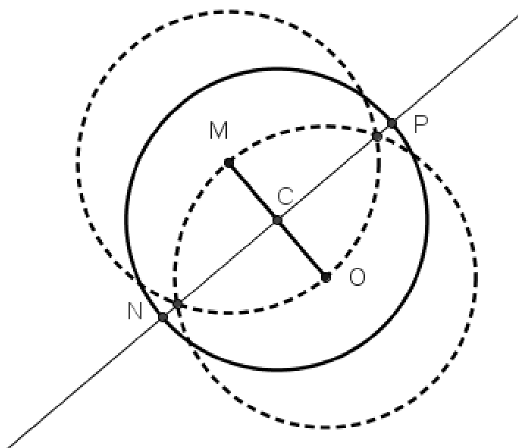
2) Marcar o ponto ***C*** na interseção do segmento ***MO*** com sua mediatriz.



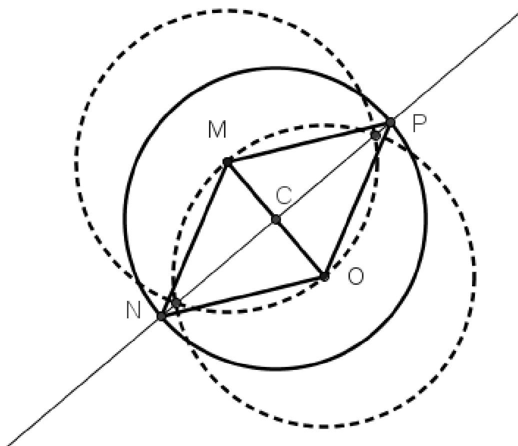
3) Abrir o compasso com a medida de ***MO*** e traçar uma circunferência com centro em ***C*** e raio ***MO***.



4) Marcar os pontos ***N*** e ***P*** na interseção da circunferência com a mediatriz do segmento ***MO***.



5) Unir por segmento de reta os pontos ***M***, ***N***, ***O*** e ***P***. O segmento ***NP*** é a diagonal maior do losango construído.



d) Fazer o retrospecto da solução alcançada.

A retrospectiva da solução foi incorporada nas etapas b e c citadas anteriormente.



ATENÇÃO

No GeoGebra há uma ferramenta chamada Polígono que é usada para construir polígonos a partir dos vértices. Ela é usada em alguns exercícios de autocorreção propostos neste curso.

INSTRUMENTO	USO	FERRAMENTA DO GEOGEBRA	
Régua	Construir polígonos a partir dos vértices.		Polígono

Você precisa praticar um pouco mais, para ganhar confiança na manipulação desses instrumentos. Por isso, estou lhe propondo alguns exercícios.



TAREFA

Exercícios de construção usando esquadros, régua, compasso e GeoGebra

Orientações

- Para cada construção proposta, você deve usar as seguintes mídias: (1) compasso, régua e/ou esquadro conforme indicado no enunciado; (2) Geogebra simulando compasso, régua e/ou esquadros. Portanto, para cada exercício, você deve fazer duas construções.

- Quando não houver a explicitação dos instrumentos a serem usados na construção, deve-se usar somente compasso e régua. E, na construção com o GeoGebra, devem-se simular esses instrumentos.
- Para cada construção, usando esquadro e régua, e compasso e régua, faça um texto aplicando a heurística de resolução de problema proposta por Pólya , exemplificada nas construções anteriores. Lembre-se de que o principal objetivo de se usar essa estratégia é ajudá-lo a estruturar a solução e organizar o conhecimento mobilizado e construído.
- O termo "em posição" significa que a construção pode se iniciar, por exemplo, com uma folha onde esse elemento "em posição" já está desenhado. É a partir dele que se começa a construção. Para usar o GeoGebra, você deve começar colocando esse elemento na área de construção, ou seja, é o primeiro elemento da sua construção. Algo parecido acontece quando, no enunciado da construção, aparece o termo "dado um segmento", "dado um ponto" ou "dado um ponto e uma reta".

1) Dados uma reta ***r*** e um ponto ***C***, pertencente à reta, traçar uma reta ***s*** perpendicular à reta ***r*** passando pelo ponto ***C***.

2) Dados uma reta ***r*** e um ponto ***C***, não pertencente à reta, traçar uma reta ***s*** perpendicular à reta ***r*** passando pelo ponto ***C***.

3) Dado um segmento de reta ***AB***, traçar uma reta ***r*** perpendicular ao segmento reta ***AB*** passando pelo ponto ***B***, extremo desse segmento.

4) Sendo dados a reta ***AB*** e um ponto ***C*** fora dela, achar o achar o ponto ***C'*** simétrico de ***C*** em relação à reta ***AB*** (***C'*** é tal que a reta ***AB*** é a mediatriz do segmento ***CC'***).

5) Dados uma reta ***r*** e um ponto ***C*** não pertencente à reta, traçar uma reta ***s*** paralela à reta ***r*** passando pelo ponto ***C***.

6) Construir um quadrado usando régua e esquadro e conhecendo, em posição, sua diagonal ***AC***.

7) Construir um quadrado usando régua e compasso e conhecendo, em posição, sua diagonal ***AC***.

8) Construir um retângulo ***ABCD*** usando régua e compasso e sendo dado, em posição, o lado menor ***AB***, de tal forma que o lado ***BC*** tenha o dobro do comprimento de ***AB***.

9) Dado o segmento ***AB***, construir um triângulo isósceles ***ABC*** tal que sua altura ***CD*** tenha o mesmo valor de sua base ***AB***.

10) Dados uma reta ***r*** e os pontos ***A*** e ***B*** não pertencentes à reta ***r***, determinar um ponto da reta que diste igualmente de ***A*** e ***B***.



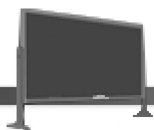
SAIBA MAIS

Leia o capítulo 1 da apostila **Uma Introdução às Construções Geométricas**, do Prof. Eduardo Wagner, que compõe o material do Programa de Iniciação Científica (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Apostila da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública. OBMEP: 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>. Acessado em: 19 mar. 2016.

Encerrando o tópico

Chegamos ao final de mais um tópico do curso. Tenha sempre em mente as possibilidades de trabalhar o conteúdo estudado, de forma a mobilizar o conhecimento já adquirido e de construir novos conhecimentos a partir da reflexão sobre o que está sendo feito.



SALA DE AULA

Como você exploraria as construções propostas na atividade citada, de forma a levar seus alunos a construir, por meio de uma discussão pedagógica, o conhecimento geométrico?

CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULOS

No mundo físico, os triângulos emprestam a característica de estabilidade e, no mundo conceitual, matemático, ajudam em várias soluções de problemas. Estudá-los é sempre um caminho de descobertas.

… e olhe que eles só têm três lados!

Provavelmente você deve ter achado muito estranha essa afirmativa, mas ela pode ser uma exclamação de alguém que analisasse todas as aplicações e usos matemáticos em que os triângulos estão envolvidos e levasse em consideração a simplicidade da construção.



Antes de continuar, é interessante que você avive a memória, revendo um pouco de triângulos. Sugiro a leitura da aula 3 do livro **Geometria Básica – Módulo I, volume 1**. Esse material foi utilizado na disciplina MEB II.

FERREIRA, Edson Luiz Cataldo Ferreira; NETO, Francisco Xavier Fontenele, RIOS, Isabel Lugão. Geometria Básica – Módulo 1. Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007, v.1, p.31-41.

Diversos livros de **Construções Geométricas** iniciam o capítulo referente à construção de triângulos com um problema clássico. E nós, para não fugirmos muito da tradição, também faremos isso.

1) Construir um triângulo, conhecendo-se os três lados.

Vamos resolver este problema, novamente, analisando pela heurística do Polya.

a) **Compreender o problema:**

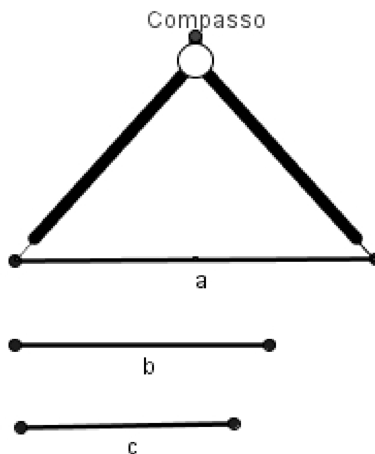
A construção se inicia com três segmentos de reta, lados do triângulo a ser construído.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

Por definição, o triângulo é um objeto geométrico construído a partir a união de três segmentos de reta. Portanto, se são fornecidos os três segmentos de reta, é necessário transportá-los, unindo-os nos vértices do triângulo.

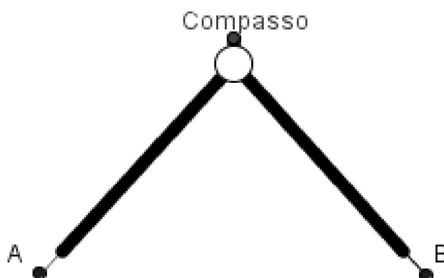
c) **Executar o plano:**

1) Abrir o compasso sobre um dos segmentos. No caso, optei pelo segmento ***a***.



2) Marcar, em outra área do papel, um ponto ***A***.

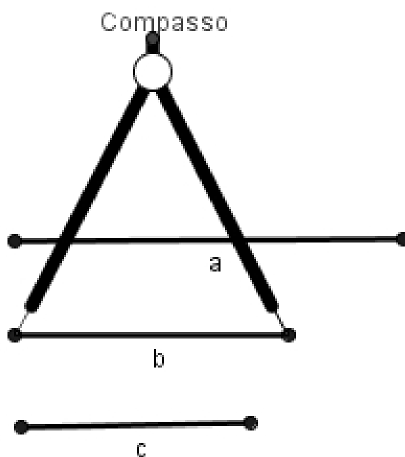
3) Colocar sobre o ponto ***A*** a ponta seca do compasso, sem alterar a abertura, e com a ponta de grafite, marcar o ponto ***B***.



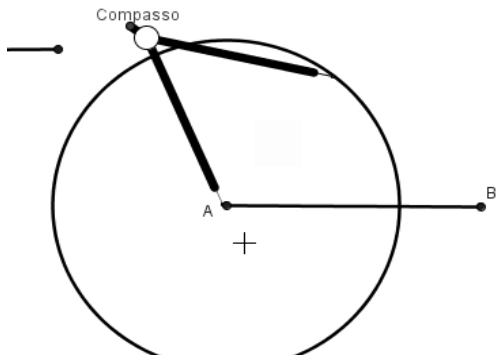
4) Unir, por segmento de reta, os pontos ***A*** e ***B***. Esse procedimento permite a criação de novo segmento com a medida de um segmento dado.



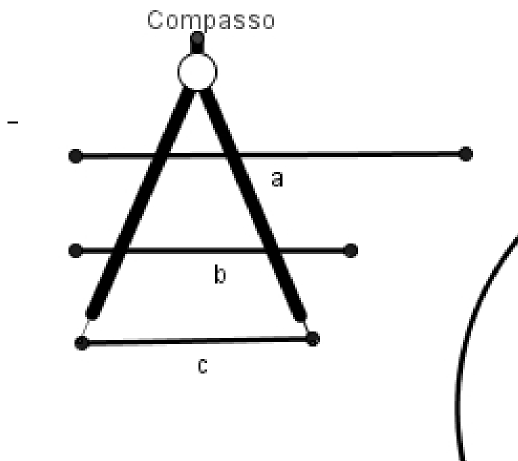
5) Abrir o compasso e fixá-lo com a medida do segmento ***b***.



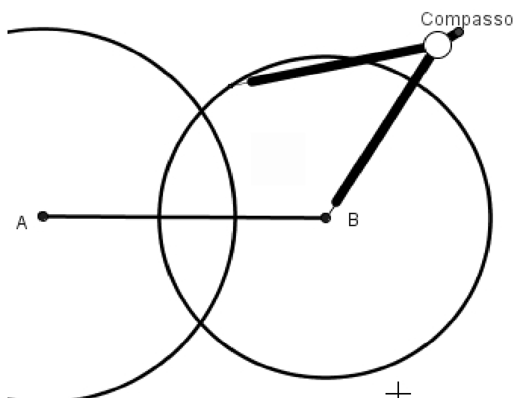
6) Traçar, com o centro de compasso (ponta seca) em um dos pontos extremos do segmento ***AB***, uma circunferência. No caso, optei pelo ponto ***A***



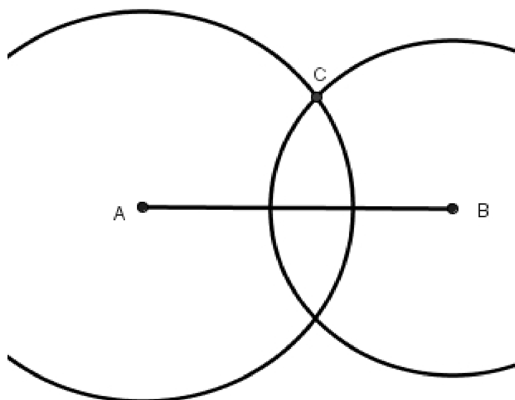
7) Fixar a abertura do compasso com a medida do segmento ***c***.



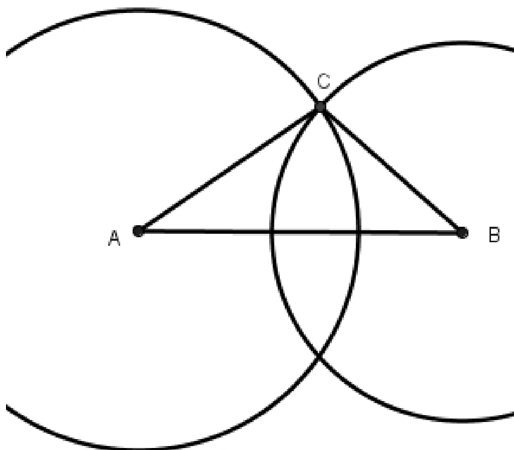
8) Traçar, com o centro de compasso (ponta seca) em ***B***, outra circunferência.



9) Na interseção das duas circunferências, optei pela interseção superior, marcar o ponto ***C.***



10) Unir, por segmentos de reta, os pontos ***A*** e ***C***, e os pontos ***B*** e ***C***.



Da forma como foi feita essa construção, pode-se afirmar:

$$AB \equiv a$$
$$AC \equiv b$$
$$BC \equiv c$$

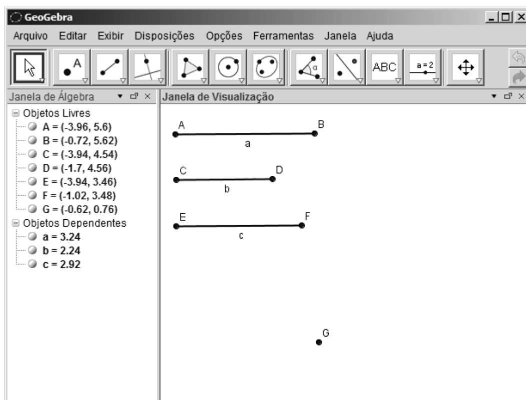
d) **<u>Fazer o retrospecto da solução alcançada.</u>**

O retrospecto foi feito na construção do roteiro descrito no item c.

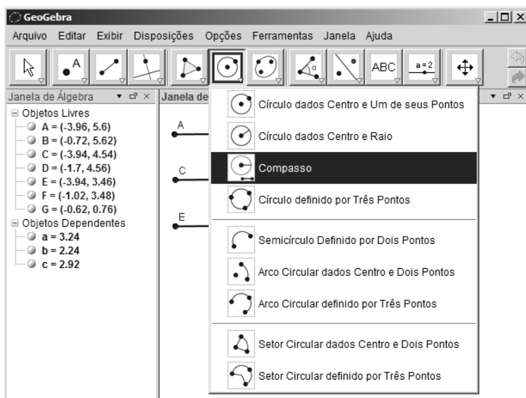
2) Construir um triângulo, conhecendo-se os três lados e usando o GeoGebra para simular compasso e régua.

1) Criar, com o GeoGebra aberto, 3 (três) segmentos de reta ***a***, ***b*** e ***c***

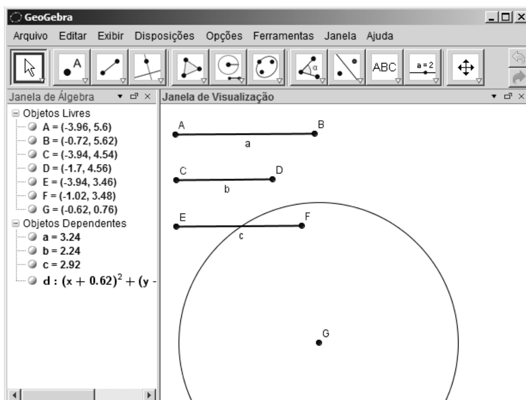
2)Marcar um ponto ***G*** em outra área de construção



3) Selecionar a ferramenta **Compasso**.

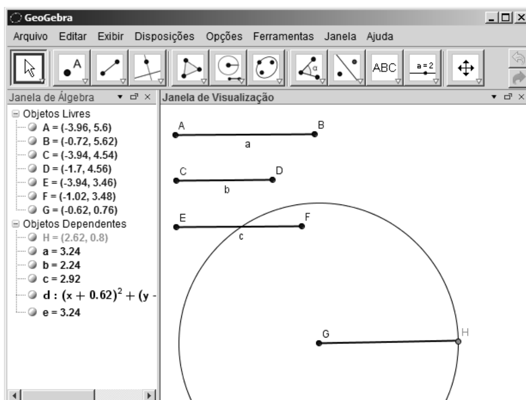


4) Clicar no ponto ***A***, no ponto ***B*** e, em seguida, no ponto ***G*** centro da circunferência.

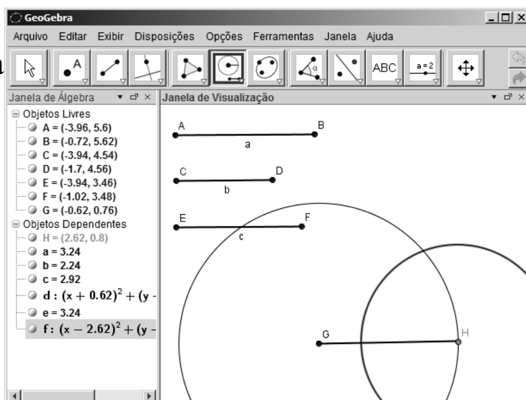


5) Marcar o ponto ***H***, sobre a circunferência ***d*** criada,

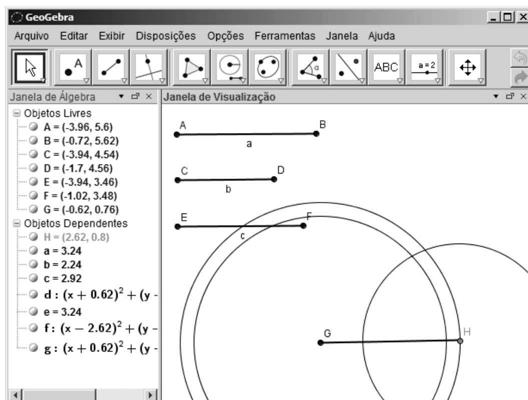
Unir, por segmento de reta, os pontos ***G*** e ***H***.



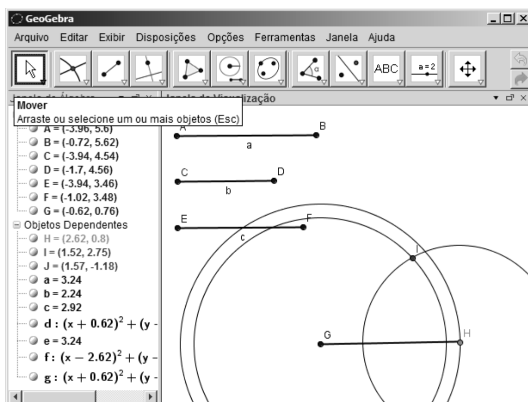
6) Selecionar a ferramenta **Compasso** e criar uma nova circunferência, ***f*** ,com centro no ponto ***H*** e raio ***b***.



7) Criar uma nova circunferência, ***g***,com centro em ***G*** e raio ***c***.

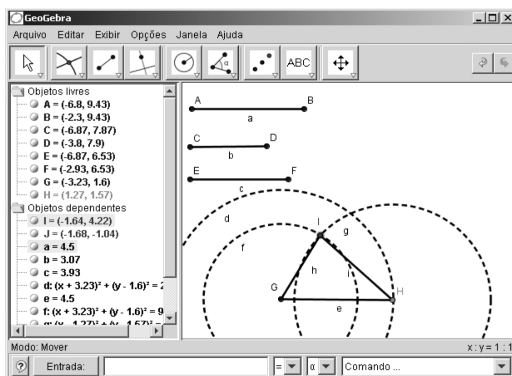


8) Selecionar a ferramenta **Interseção de dois objetos** e clique na circunferência ***f*** e ***g***, marcando assim os pontos ***I*** e ***J***.



9) Unir, por segmentos de reta, os pontos ***G*** e ***I*** e os ponto ***H*** e ***I***.

10) Salvar esta construção, que vai ser usada mais adiante.





Uma vez definidos os pontos, pode-se usar a ferramenta **Polígono**, do GeoGebra, para "fechar" o triângulo ou qualquer polígono.

Apesar desta construção ser básica e comum nos livros de **Construções Geométricas**, poucas vezes é aproveitada para uma discussão conceitual sobre formação de triângulos.

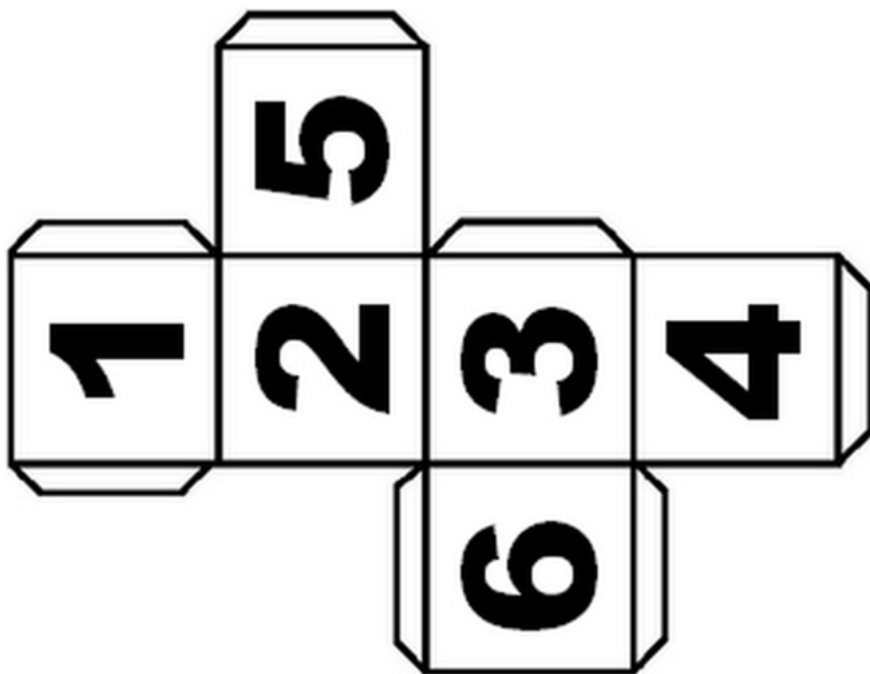


TAREFA

Vou propor uma brincadeira. Espero que você me acompanhe.

Prepare os seguintes materiais:

- 3 palitos de 1 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 3 palitos de 2 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 3 palitos de 3 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 3 palitos de 4 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 3 palitos de 5 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 3 palitos de 6 cm (podem ser canudinhos para refrigerantes)
- 1 dado (caso você não tenha um dado, monte um com o modelo apresentado a seguir).



Você deve jogar o dado 3 vezes, procedendo da seguinte forma:

a) Jogue o dado a primeira vez.

b) Separe o palito (ou canudinho) com a medida que saiu no dado. Se no dado saiu o número 1, separe o palito de 1 cm; se saiu o número 2, separe o palito de 2 cm e assim por diante.

c) Anote, na tabela apresentada a seguir, o valor que saiu no dado.

d) Jogue o dado a segunda vez.

e) Separe o palito (ou canudinho) com a medida que saiu no dado. Se no dado saiu o número 1, separe o palito de 1 cm; se saiu o número 2, separe o palito de 2 cm e assim por diante.

f) Anote, na tabela apresentada a seguir, o valor que saiu no dado.

g) Jogue o dado a terceira vez.

h) Separe o palito (ou canudinho) com a medida que saiu no dado. Se no dado saiu o número 1, separe o palito de 1 cm; se saiu o número 2, separe o palito de 2 cm e assim por diante.

i) Anote, na tabela apresentada a seguir, o valor que saiu no dado.

j) Com os três palitos, tente formar um triângulo.

k) Na coluna "Formou triângulo?", responda Sim, se com os valores (e os palitos), foi possível formar o triângulo, ou Não, se com os valores (e os palitos), não foi possível formar o triângulo.

	1ª Jogada	2ª Jogada	3ª Jogada	Formou triângulo?
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

A partir da análise da tabela, escreva uma regra geral para formação de triângulos e submeta essa regra à análise de seus colegas.

Vamos continuar brincando?

Abra a construção do GeoGebra que fizemos e arraste, alternadamente, os pontos ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** e ***F***. Observe os valores dos segmentos ***a***, ***b*** e ***c*** na janela de álgebra do Geogebra.

Outra experimentação interessante é tentar colocar os valores da tabela nos segmentos dessa construção.



PARE E PENSE

1) O que aconteceu com as circunferências ***f*** e ***g*** quando os valores dos segmentos não permitiram formar triângulos?

2) Sua regra pode ser validada para esta construção?

3) Procurando na internet ou em livros de Matemática, pode-se encontrar, em outras palavras, o que você observou. Tente achar outros enunciados para a formação de triângulos e compare com o que você escreveu. A experiência e o enunciado fazem sentido para você?

Você, provavelmente, se lembrou de um texto que lemos e que tratou desse assunto. Lembrou? Não? Para “desencargo de consciência”, vou indicá-lo novamente.



SAIBA MAIS

Leia o texto do professor Paulo César da Penha apresentado no 16º COLE na UNICAMP, Campinas/SP.

Ele analisa uma atividade desenvolvida com os alunos sobre a desigualdade triangular.

PENHA, Paulo César da. A desigualdade triangular em diferentes mídias. IN: Anais do 16° COLE. Campina: ALB, 2007. Disponível em: <http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_03.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

3) Construir um triângulo isósceles sendo dada a base.

a) **Compreender o problema:**

É dado um segmento de reta que deve ser usado na construção, como base do triângulo isósceles a ser construído.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

O triângulo isósceles possui dois lados iguais.

Sabe-se que um ponto que equidista de dois outros pontos, extremos de um segmento, pertence à mediatriz desse segmento.

Sabe-se que a mediatriz de um segmento é a reta que passa perpendicularmente a este segmento pelo seu ponto médio.

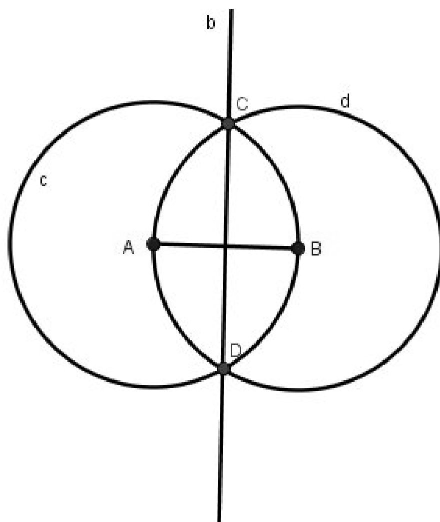
Dessa forma, é preciso traçar a mediatriz da base informada e colocar sobre ela o vértice do triângulo a ser construído.

c) Executar o plano:

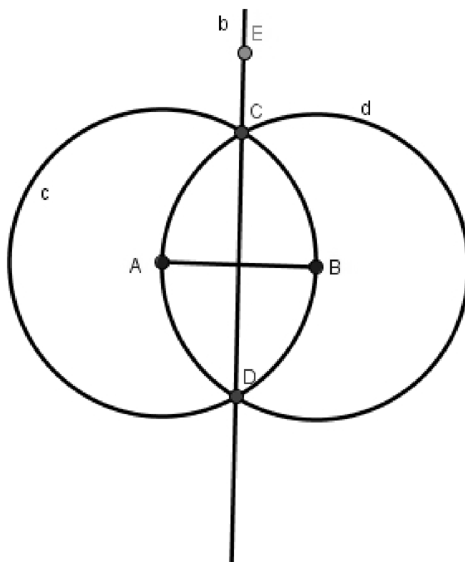
1) Criar um segmento ***AB***.



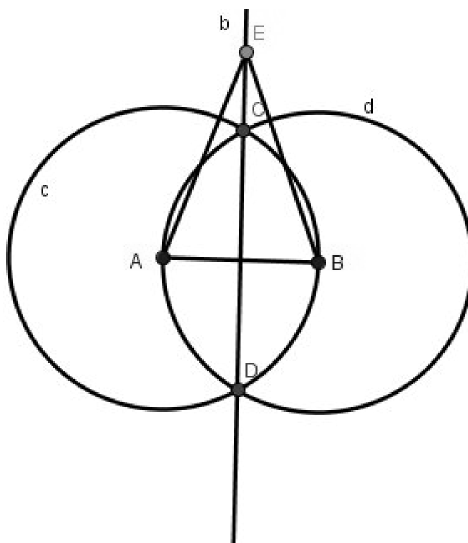
2) Traçar a mediatriz do segmento ***AB***. Para isso, criar uma circunferência ***c*** com centro em ***A*** e raio ***AB*** e uma circunferência ***d*** com centro em ***B*** e raio ***AB***. Marcar os pontos ***C*** e ***D*** nas intersecções das circunferências ***c*** e ***d***. Unir, por reta, os pontos ***C*** e ***D***.



3) Marcar um ponto ***E*** sobre a mediatriz.



4) Unir, por segmento de reta, os pontos ***A*** e ***E***; e unir os pontos ***B*** e ***E***.



d) <u>Fazer o retrospecto da solução alcançada:</u>

Tomando com referência a última figura da construção, podemos afirmar que os pontos ***C*** e ***D*** equidistam dos pontos ***A*** e ***B***,pois eles foram marcados na interseção das circunferências ***c*** e ***d*** de mesmo raio ***AB***. Interligando esses pontos por uma reta, traçamos a mediatriz. Como o ponto ***E*** está sobre a mediatriz, ao criar os segmentos de reta ***AE*** e ***BE***, podemos afirmar que eles são congruentes.



TAREFA

Aproveite para praticar.

Faça a resolução do problema 3 (Construir um triângulo isósceles sendo dada a base), usando compasso e régua e baseando-se nos passos descritos, na construção acima. Faça também a construção, usando Geogebra, para simular o compasso e régua.

4) Construir um triângulo isósceles *BCD*, sendo dados, em posição, uma circunferência com seu centro *A* e uma corda *BC*.

a) **Compreender o problema:**

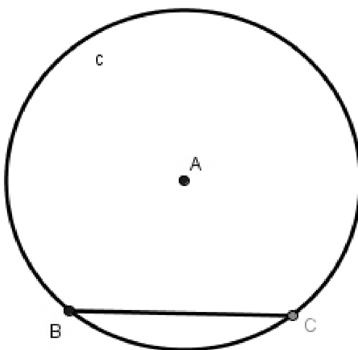
A partir da circunferência de centro ***A*** e de uma corda ***BC***, construir um triângulo isósceles ***BCD***.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

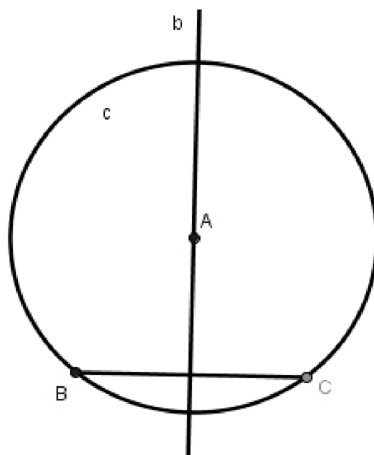
A análise feita no problema anterior é valida também para este.

c) Executar o plano:

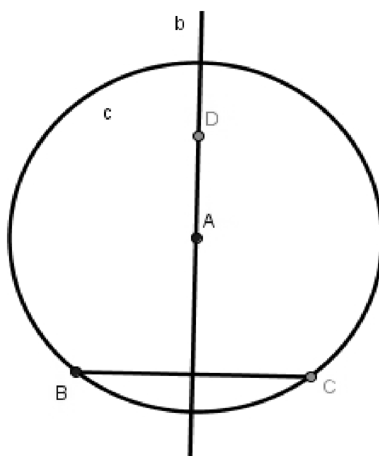
1) Criar uma circunferência com centro ***A*** e raio qualquer. Marcar dois pontos sobre essa circunferência e uní-los por segmento de reta.



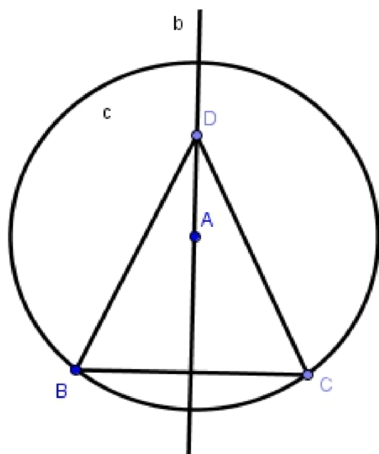
2) Traçar a mediatriz de ***BC***.



3) Marcar o ponto ***D*** sobre a mediatriz.



4) Unir, por segmento de reta, os pontos ***B*** e ***D***; e unir os pontos ***C*** e ***D***.





TAREFA

Para continuar os estudos, é imprescindível que você faça essa construção no Geogebra.

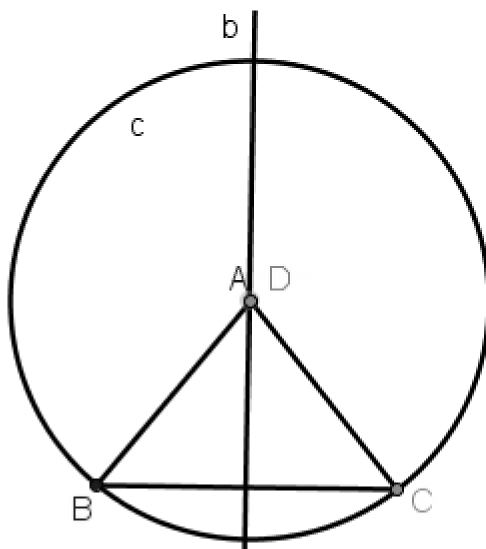
Vamos aproveitá-la para fazer algumas experimentações e reflexões.

Vamos fazer algumas observações sobre a construção:

Arrastar o ponto ***D*** de modo que ele coincida com o ponto ***A***.

Nessa condição, pode-se afirmar que ***DB*** e ***CD*** são congruentes, pois são raios da circunferência.

O centro da circunferência está sobre a mediatriz da corda ***BC***.



Existe uma relação direta entre a corda ***BC*** e o ângulo ***BAC*** ou ***BDC***.



ATENÇÃO

Aproveite a construção anterior e faça outras manipulações procurando observar as relações que se mantêm



TAREFA

Existem algumas construções que são básicas. A seguir, proponho algumas delas.

Faça pesquisa em livros de construções geométricas ou sites de internet e execute suas construções usando compasso e régua e o GeoGebra e procurando fazer a análise de seus roteiros.

1) Construir um triângulo, dados dois lados e o ângulo entre eles.

2) Construir um triângulo, conhecendo dois ângulos internos e o lado entre eles.

3) Construir um triângulo ***ABC***, sendo dados um lado, em posição, um ângulo e o ângulo oposto ao lado informado.

4) Traçar as alturas dos 3 lados do triângulo dado.

5) Traçar as medianas dos 3 lados do triângulo dado.

6) Traçar as bissetrizes dos 3 ângulos internos do triângulo dado.

7) Dado o triângulo ***ABC***, construir seu incentro.

8) Dado o triângulo ***ABC***, construir seu ortocentro.

9) Dado o triângulo *ABC*, construir seu baricentro.

10) Circunscrever uma circunferência a um triângulo *ABC* dado.

11) Inscrever uma circunferência em um triângulo *ABC* dado.

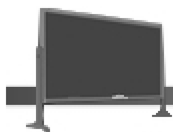


PARE E PENSE

Qual a condição necessária para que os três pontos notáveis sejam coincidentes? Como você pode provar isso?

Encerrando o tópico

Você deve ter notado que foram usados conhecimentos básicos de Geometria, nada muito sofisticado. Porém, conseguimos boas situações exploratórias que podem ser trabalhadas com os alunos.



SALA DE AULA

Que tipo de conhecimento prático, pertencente ao dia a dia do seu aluno, você poderia levar para a sala de aula quando estiver trabalhando triângulos?

CIRCUNFERÊNCIA

Explica a Wikipedia:

> Na geometria euclidiana, uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão a uma certa distância, chamada raio, de um certo ponto, chamado centro. Um conceito correlato e próximo, porém distinto, [é] o de círculo. A circunferência [é] o contorno do círculo (wikipedia, 2012).

Este ente geométrico é o foco deste tópico.



ATENÇÃO

A partir deste tópico, vamos "economizar" descrições nos roteiros das construções. Caso você tenha dúvidas, retorne às construções dos tópicos anteriores.

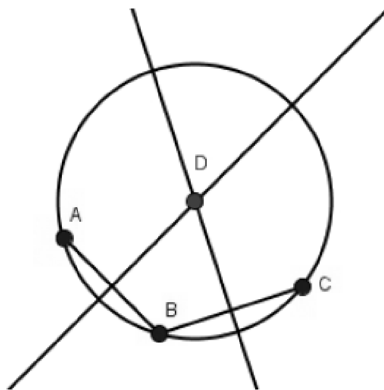
1) Dados três pontos *A*, *B* e *C* não colineares, traçar uma circunferência que passe por eles.

a) **<u>Compreender o problema:</u>**

A construção se inicia com três pontos, não colineares.

b) <u>Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):</u>

- Podemos afirmar que se os três pontos pertencem a uma mesma circunferência, a distância deles ao centro da circunferência é a mesma, pois os segmentos que os unem ao centro são raios da mesma circunferência.
- Sabe-se que a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos desse segmento.
- Com três pontos, pode-se traçar a mediatriz de dois segmentos de retas, no caso, os segmentos ***AB*** e ***BC***. Na interseção das duas mediatrizes tem-se um ponto que equidista dos pontos ***A***, ***B*** e ***C***. Ele é o centro da circunferência que contém esses três pontos.



c) <u>Executar o plano</u>:

1) Unir, por segmento de reta, os pontos ***A*** e ***B***.
2) Traçar a mediatriz do segmento ***AB***.
3) Unir, por segmento de reta, os pontos ***B*** e ***C***.
4) Traçar a mediatriz do segmento ***BC***.
5) Marcar, na interseção das mediatrizes, o ponto ***D***.
6) Traçar, com centro em ***D***, a circunferência que passe pelos pontos ***A***, ***B*** e ***C***.

d) <u>Fazer o retrospecto da solução alcançada.</u>

A chave da resolução deste problema é achar o ponto que equidista dos pontos ***A***, ***B*** e ***C***. Ele é o centro da circunferência que passa pelos outros três pontos, sendo obtido pela interseção das duas mediatrizes: a mediatriz do segmento ***AB*** e a mediatriz do segmento ***BC***.

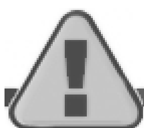
Vamos dar uma "paradinha" nas construções para relembrar um assunto tratado pelo prof. Luiz Carlos Pais e apresentado por mim no tópico 2, **Concepções que nos nortearão**.

Nele se falou das construções dos conceitos geométricos a partir de experiências raciocinadas pela manipulação de objetos, desenhos e desenhos dinâmicos que favorecem a criação de imagens mentais.

Quando nos propomos estudar determinada área de conhecimento e nos dedicamos a isso, as leituras, experimentações e informações vão fornecendo elementos suficientes para a criação de um ciclo contínuo entre experiências e informações, criação de imagens mentais e construção de conceitos.



Apesar de isso ser simples e lógico, muitas vezes não usamos esse pensamento ao observar um professor trabalhando em sua disciplina, explicando algum conteúdo ou resolvendo um problema matemático. Parece que o seu conhecimento "caiu do céu", esquecendo-se que esse professor, com certeza, tem muitas e muitas horas de estudos e reflexões sobre o assunto.



ATENÇÃO

O objetivo é fazer uma construção dinâmica e, a partir de sua manipulação, observar determinada propriedade. Podemos utilizar algumas ferramentas que poupam tempo e trabalho, como a ferramenta **Ponto médio**.



TAREFA

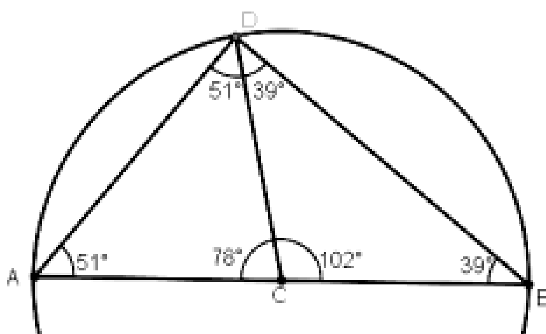
Antes de continuar, faça a construção a seguir no GeoGebra.

1) Criar um segmento ***AB*** e marcar seu ponto médio ***C***.
2) Criar uma circunferência, com centro ***C*** e raio ***AC***.
3) Marcar um ponto ***D*** sobre a circunferência;
4) Traçar os segmentos ***AD*** e ***DB***.
5) Medir o ângulo ***ADB***.
6) Movimentar o ponto ***D*** sobre a circunferência e observar o valor do ângulo.

Você deve ter observado uma propriedade do ângulo ***ADB,*** muito interessante: independentemente da posição do ponto ***D*** sobre a semicircunferência, seu valor é sempre 90º.

Por que isso acontece?

Veja a figura a seguir.



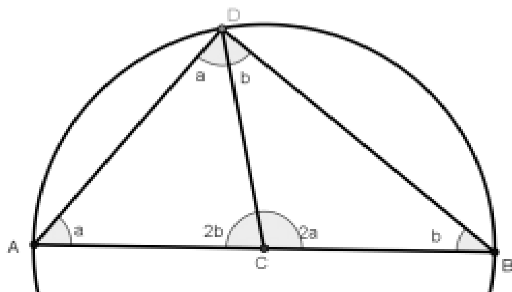
Analisando a figura, pode-se concluir:

Com relação ao triângulo ***ACD***

- Os segmentos dos lados ***AC*** e ***CD*** são raios da circunferência, portanto têm o mesmo valor;
- Os ângulos ***CAD*** e ***CDA*** têm o mesmo valor;
- O ângulo ***DCB*** é um dos seus ângulos externos.

Com relação ao triângulo ***BCD***

- Os segmentos dos lados ***BC*** e ***CD*** são raios da circunferência, portanto têm o mesmo valor;
- Os ângulos ***CAD*** e ***CDB*** têm o mesmo valor;
- O ângulo ***DCA*** é um dos seus ângulos externos.



Sabe-se o seguinte:

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CDA$$
$$\measuredangle CBD = \measuredangle CDB$$

$$(1) \measuredangle DCB = \measuredangle CAD + \measuredangle CDA$$
$$(2) \measuredangle DCA = \measuredangle CBD + \measuredangle CDB$$
$$(3) \measuredangle DCA + \measuredangle DCB = 180^o$$

Fazendo

$$a = \measuredangle CAD = \measuredangle CDA$$
$$b = \measuredangle CBD = \measuredangle CDB$$

e substituindo em (1), temos:

$$\measuredangle DCB = a + a = 2\text{a}$$

Substituindo em (2), temos:

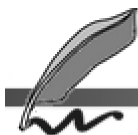
$$\measuredangle DCA = b + b = 2\text{b}$$

Substituindo em (3), temos:

$$2\text{a} + 2\text{b} = 180$$
$$|2\text{a} + 2\text{b} = 180| \div 2$$
$$a + b = 90$$

Retificação de circunferência

Antes de iniciar as construções de circunferência, vamos fazer mais um pouco de experimentação.



TAREFA

Para esta atividade vamos precisar de

- Latas em forma de cilindro;
- Tira de papel comprida;
- Régua;
- Papel, lápis e compasso.

Passos:

1) Coloque a lata sobre o papel e, com o lápis, circule o fundo.
2) Ache o centro do círculo feito no passo 1, usando o compasso e a régua.
3) Trace o diâmetro da circunferência e meça-o com a régua.
4) Meça, com a tira de papel e a régua, a circunferência da lata usada para traçar a circunferência.
5) Divida o valor da medida feita com tira de papel pelo valor do diâmetro da lata.

Repita a experiência com outras latas ou objetos de tamanho variados.



PARE E PENSE

Você conhece alguma constante matemática que se aproxime do valor obtido?

> Sabemos que há uma relação constante entre a circunferência e o seu diâmetro. Essa relação constante [é] representada, universalmente, pela letra π (pi), cujo valor aproximado é 3,1416. Conhecendo-se o diâmetro, pode-se, portanto, determinar facilmente o comprimento da circunferência.
>
> Assim, pode-se dizer que o comprimento da circunferência é, aproximadamente o triplo mais um sétimo do diâmetro, o que vai nos permitir obter um segmento de reta cujo comprimento seja aproximadamente igual ao comprimento da circunferência dada.
>
> Este problema tem solução aproximada. (PENTEADO, 1960, p.99 apud LINDEMANN, 1882)

Portanto, o segmento de reta obtido pelos métodos de retificação da circunferência é aproximado.

Neste estudo, vamos utilizar o método mais simples, pois, como frisamos nosso objetivo na disciplina é mobilizar o conhecimento matemático. Assim, usando esse método, conseguiremos trabalhar com os alunos do Ensino Fundamental e Médio usando técnicas conhecidas por eles e que permitem uma reflexão sobre o conceito em questão.

2) Faça, pelo método de Arquimedes, a retificação de uma circunferência dada.

Arquimedes demonstrou que o valor de π está compreendido entre 3 10/71 e 3 10/70, ou seja, é aproximadamente 3 1/7. Pode-se então dividir a construção em duas etapas:

lª – Obter o diâmetro da circunferência: esta etapa é simples, já a fizemos anteriormente.

2ª – Dividir um segmento (diâmetro da circunferência) em sete partes iguais: parte nova.

Dividindo um segmento sucessivamente ao meio, obtém-se uma quantidade de partes múltipla de $2^{n.}$. Por exemplo: com uma divisão (2^1) obtém-se duas partes; com duas divisões (2^2) obtém-se quatro partes e assim por diante. Esta divisão não atende ao que desejamos.

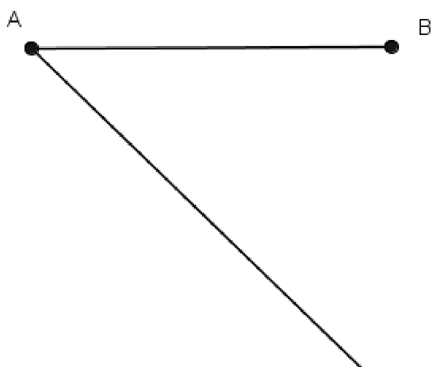
Para resolver o problema, utilizamos o princípio da proporcionalidade ou Teorema de Tales.

Veja a construção.

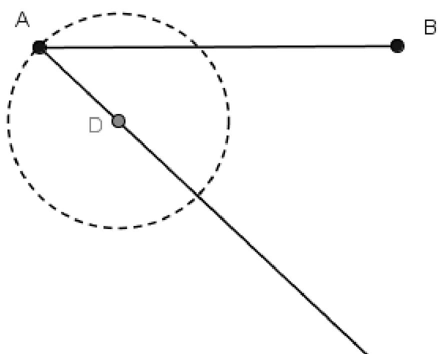
1) Traçar o segmento ***AB***, que deve ser dividido em 3 partes iguais.



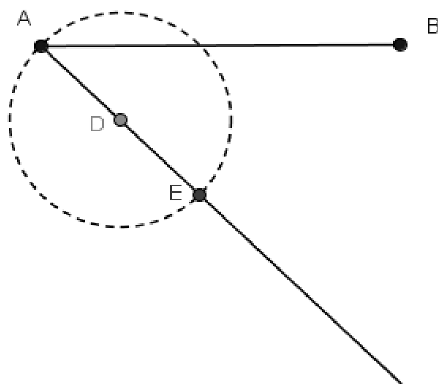
2) Traçar uma semirreta auxiliar, partindo do ponto ***A***.



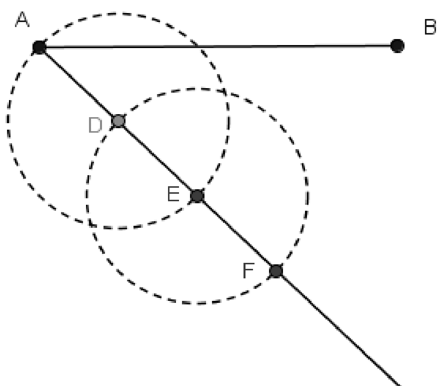
3) Marcar um ponto ***D*** qualquer sobre a semirreta e, em seguida, traçar uma circunferência, com centro em ***D***, que passe por ***A***.



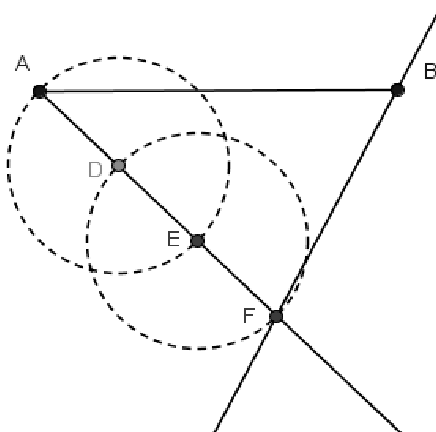
4) Marcar, na interseção da circunferência com a semirreta, o ponto ***E***.



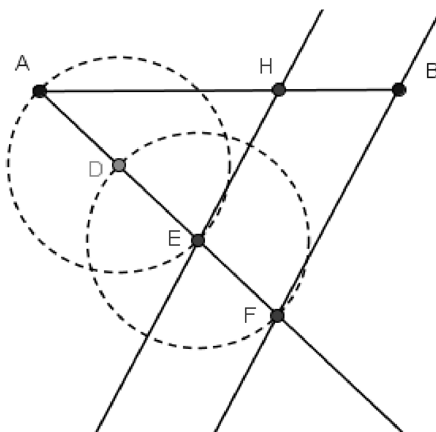
5) Traçar uma nova circunferência, com centro em ***E***, que passe por ***D***. Marcar, na interseção dessa circunferência com a semirreta, o ponto ***F***.



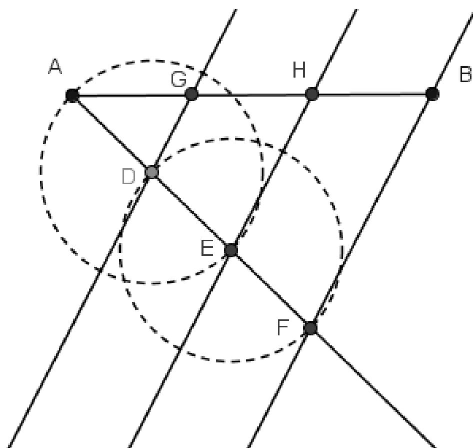
7) Unir, por reta, os pontos ***F*** e ***B***.



8) Traçar uma reta paralela à reta ***FB***, passando pelo ponto ***E***. Na interseção dessa reta com o segmento ***AB***, marcar o ponto ***H***.



9) Traçar uma reta paralela à reta ***EH***, passando pelo ponto ***D***. Marcar, na interseção desta reta com o segmento ***AB***, o ponto ***G***.



Os segmentos ***AG***, ***GH*** e ***HC*** têm 1/3 do comprimento de ***AB***.

Este procedimento é utilizado para a divisão de um segmento em qualquer quantidade de partes iguais.



PARE E PENSE

Pode-se usar os esquadros para traçar as retas paralelas. Como você justificaria esta construção? Por que você sabe que ela está certa?



TAREFA

Como já resolvemos a segunda parte do problema, podemos juntar as duas partes e executar a retificação da circunferência dada.

Resolva o problema proposto: a retificação, pelo método de Arquimedes, de uma circunferência dada.

Divisão da circunferência em arcos

> A divisão da circunferência em partes iguais é a operação básica para a inscrição de polígonos regulares [no círculo]. Isso equivale a dizer que se dividirmos uma circunferência em um número natural n > 2 de partes iguais e se unirmos o primeiro ponto da divisão com o segundo, o segundo com o terceiro e assim por diante, acabaremos por ter construído um polígono regular inscrito de n lados. (SOUZA, PIMENTA, ARMOUT, 2005, p.103).

Outro raciocínio que envolve este procedimento é pensar em construção de ângulo para promover a divisão da circunferência.

Vamos a algumas construções básicas.

3) Dividir a circunferência de centro A, dada, em 4 partes iguais.

a) **Compreender o problema:**

É dada uma circunferência com centro no ponto ***A*** que deverá ser dividida em 4 partes iguais.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

1) Sabendo que uma circunferência tem 360º, dividi-la em 4 partes equivalente a marcar ângulos de 90º.

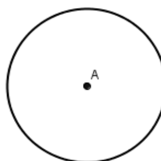
2) Tendo um segmento de reta com um ponto, pode-se obter um ângulo de 90º, traçando a perpendicular a esse segmento que passe pelo ponto.

3) O segmento referenciado no item 2 pode ser o diâmetro da circunferência e o ponto, o centro da circunferência.

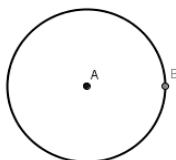
4) O plano é traçar dois diâmetros perpendiculares da circunferência.

c) <u>Executar o plano:</u>

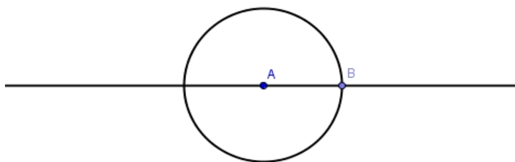
1) Traçar uma circunferência de centro ***A*** e raio qualquer.



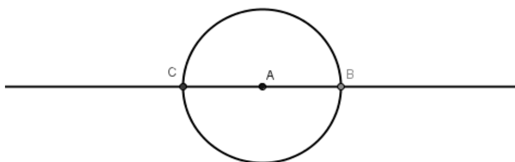
2) Marcar sobre a circunferência um ponto ***B***.



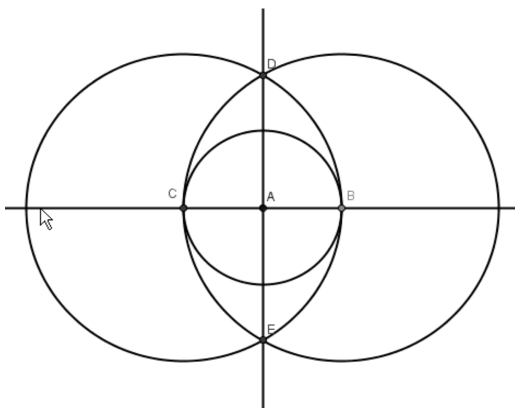
3) Unir por reta os pontos ***A*** e ***B***.



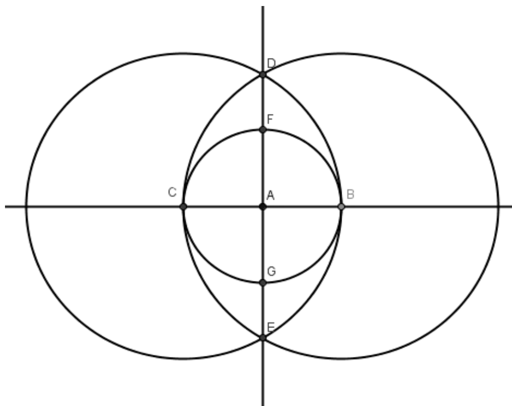
4) Marcar, na interseção da circunferência com a reta ***AB***, o ponto ***C***.



5) Traçar a mediatriz do segmento ***BC***.



6) Marcar, nas interseções da mediatriz com a circunferência inicial, os pontos ***F*** e ***G***.



O pontos ***B***, ***F***, ***C*** e ***G*** dividem a circunferência em 4 partes iguais.

Observe que, ao unir esses quatro pontos por segmento de reta estamos construindo um quadrado.



PARE E PENSE

Por que se pode afirmar que o polígono ***BFCG*** é um **quadrado** e não um **losango**? O losango também não possui quatro lados iguais?



TAREFA

Faça pesquisa em livros de construções geométrica ou sites de internet e execute as construções usando compasso e régua e o GeoGebra e procurando fazer a análise dos roteiros.

1) Dados uma circunferência e o ponto ***P***, pertencente à circunferência, traçar uma reta tangente à circunferência no ponto ***P***.

2) Traçar uma circunferência tangente a uma reta ***r*** num ponto ***A*** que passe por um ponto dado ***B***, não pertencente à reta ***r***.

3) Construir, sobre a circunferência dada, os pontos que a dividem em 3 arcos iguais, ***EF***, ***FG*** e ***GE***.

4) Inscrever um hexágono regular ***ABCDEF*** em uma circunferência dada.

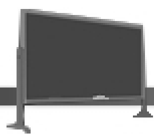
5) Inscrever um octógono regular em uma circunferência dada.

6) Dados um segmento ***r*** qualquer e os pontos ***A*** e ***B*** pertencentes a uma reta ***s***, com distância ***AB*** é menor que ***r***, traçar uma circunferência de raio ***r*** e que passe pelos pontos ***A*** e ***B***.

7) Dado o ângulo ***CÂP***, formado pelas semirretas ***AC*** e ***AP***, traçar uma circunferência tangente às duas semirretas sendo o ponto ***P*** um dos pontos de tangência.

Encerrando o tópico

Circunferência, assim como outros assuntos da Geometria, pode ser explorada junto com outros conteúdos, como Artes. Muitas vezes, essas associações podem despertar o interesse do aluno e tornam a aprendizagem mais significativa para ele.



SALA DE AULA

Como você poderia aproveitar a tarefa exploratória sobre as circunferências das latas, usadas para identificar a constante π, para introduzir o estudo do volume de cilindro e do cone?

CONCORDÂNCIA

Na minha opinião, vamos entrar num dos mais belos tópicos das **Construções Geométricas**.

Pela concordância (de arcos com retas e arcos com arcos), é possível ver os elementos geométricos se transformarem em conjuntos estéticos harmoniosos e belos e, pelas construções cíclicas, em composições que lembram as belas padronagens artísticas.

Espero que você se encante tanto quanto eu.

Concordância

De uma forma ou outra, todos nós já tivemos, no dia a dia, contato com objetos que utilizaram a concordância para se tornarem mais estéticos ou anatômicos. O exemplo pode ser este televisor, que possui os cantos arredondados.





Pode ser feita concordância entre dois arcos de circunferência ou um arco de circunferência e uma reta (reta, semirreta ou segmentos de reta). Porém essa ligação deve se feita com suavidade, sem haver inflexão ou fraturas.

Para que haja concordância, é necessário atender às regras gerais:

1. Diz-se que um arco e uma reta estão em concordância num ponto quando a reta é tangente ao arco nesse ponto.
2. Na concordância de uma semirreta com um arco de circunferência o ponto de concordância e o centro do arco estão numa mesma perpendicular [à semirreta]. O conjunto semirreta-arco deve formar uma só linha [...].
3. Dois arcos de circunferência estão em concordância num ponto qualquer quando eles admitem nesse ponto uma tangente comum. Nesta hipótese, os centros dos dois arcos e o ponto de concordância (de tangência) estão numa mesma reta (ou em linha reta). (PENTEADO, 1960, p. 138-139)

Vejamos alguns problemas clássicos de concordância.

1) Unir, por arco de circunferência com concordância, o ponto *A* de uma semirreta *AB* dada com o ponto *C*, também dado.

a) **Compreender o problema:**

Conforme o enunciado do problema, é dada uma semirreta ***AB*** e um ponto ***C*** fora dela. Devem-se unir, por meio de um arco de circunferência, os pontos ***A*** e ***C*** , com concordância.

b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

Pelo enunciado do problema, pode-se afirmar que conhecemos dois pontos da circunferência: ponto ***A*** e o ponto ***C***. É preciso achar o centro desse arco. Usamos o mesmo processo de achar o centro de uma circunferência. Porém é preciso atender à concordância.

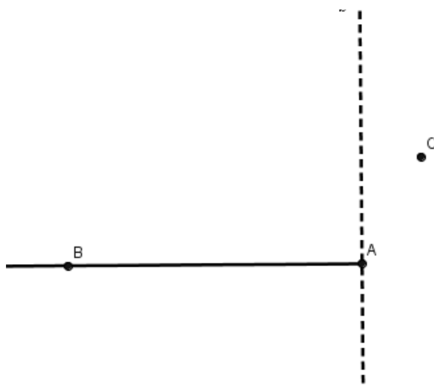
Observando as regras de concordância 1 e 2, pode-se afirmar que o centro do arco de circunferência está na perpendicular à semirreta pelo ponto ***A***. Essa é a primeira reta para determinar o centro do arco da circunferência. A segunda reta é a mediatriz da corda ***AC***, conforme já estudamos em tópico anterior. Na interseção das duas retas está o centro do arco.



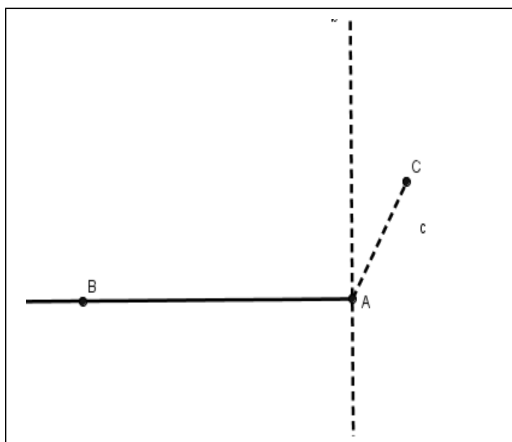
Para esta construção, utilize régua e compasso, além dos esquadros para traçar as retas perpendiculares.

Mas não se esqueça: é importante dominar as técnicas básicas de construção de paralelas e perpendiculares usando somente régua e compasso.

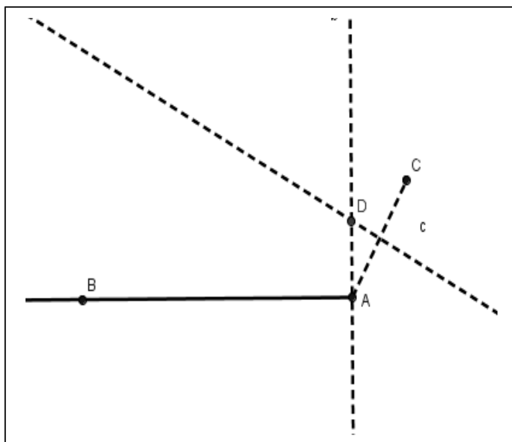
1) Traçar, a partir da condição inicial, uma reta perpendicular à semirreta ***AB*** pelo ponto ***A***.



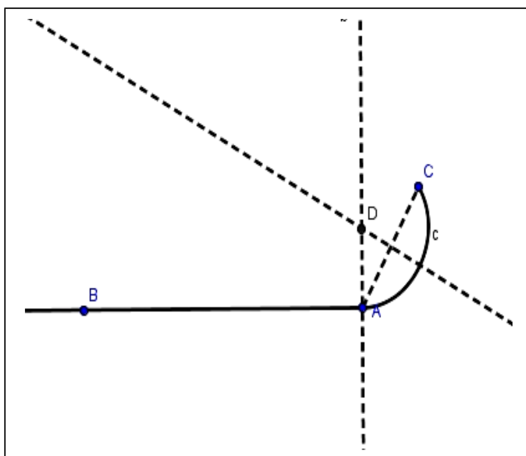
2) Unir por segmento de reta os pontos ***A*** e ***C***, corda do arco de circunferência a ser construído.



3) Traçar a mediatriz do segmento ***AC*** e marcar, na interseção com a perpendicular da semirreta o ponto ***D***, centro do arco desejado.



4) Unir, com o centro de compasso em ***D***, por arco de circunferência, os pontos ***A*** e ***C***, concordando com a semirreta ***AB***.



d) **<u>Fazer o retrospecto da solução alcançada</u>:**

O retrospecto foi feito na construção do roteiro descrito nos itens **b** e **c**.



TAREFA

Após ter feito esta construção, usando régua, compasso e esquadros, refaça-a, usando o GeoGebra.

Para ganhar tempo, partindo do princípio de que você já está dominando e entendendo as técnicas básicas de construção de perpendiculares, paralelas, ponto médio e mediatriz, utilize essas ferramentas do Geogebra na construção. Dependendo da versão do GeoGebra, elas podem não existir. Por exemplo, a ferramenta **Mediatriz** só foi incorporada a partir da versão 3.0.

Outra ferramenta do GeoGebra que é muito importante nestas construções é **Arco Circular dados Centro e Dois Pontos**.

---

2) Dado um quadrado *ABCD*, arredondar os vértices por meio de concordância de arcos com ponto de tangência em ¼ de seu lado.

a) **Compreender o problema:**

A construção se inicia a partir de um quadrado dado. Deve-se, então, arredondar o vértice do quadrado por meio de concordância de arcos.

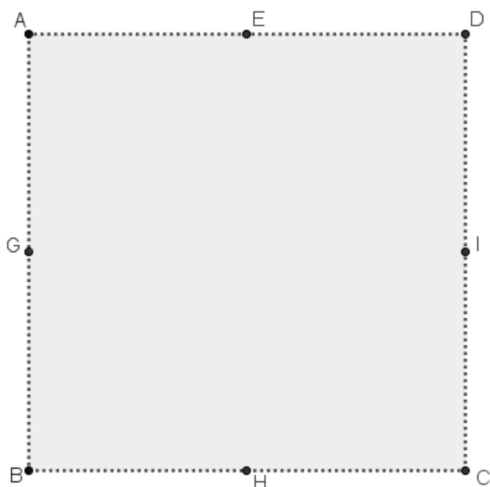
b) **Estabelecer um plano (o que conheço a respeito):**

Será necessário marcar o ponto de tangência, que é ¼ do lado. Pode-se marcar o ponto médio do lado e depois marcar outros pontos médios entre este e os vértices do quadrado.

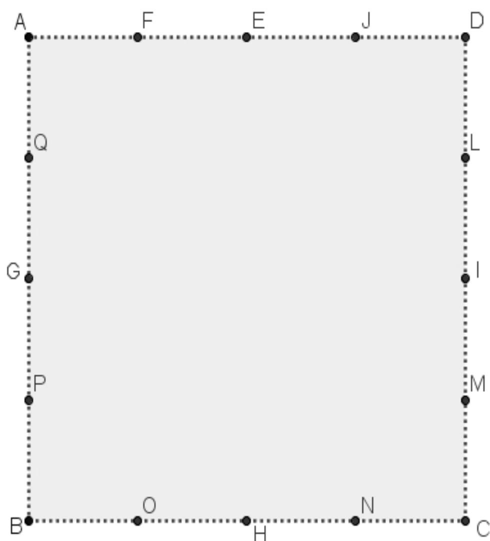
Por cada ponto que está a ¼ do vértice, deve-se traçar uma perpendicular em relação ao lado que contém esse ponto. Não há necessidade de unir os pontos que formam a corda do arco, pois, como estamos trabalhando com o quadrado, a mediatriz é a diagonal do quadrado. A interseção entre a mediatriz e a perpendicular coincide com a interseção entre duas perpendiculares.

c) **Executar o plano:**

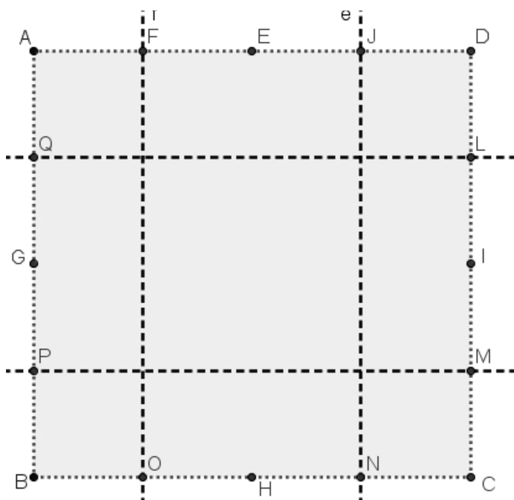
1) Vamos começar a construção, a partir da condição inicial, o quadrado ***ABCD*** dado, e nele marcar os pontos médios dos lados.



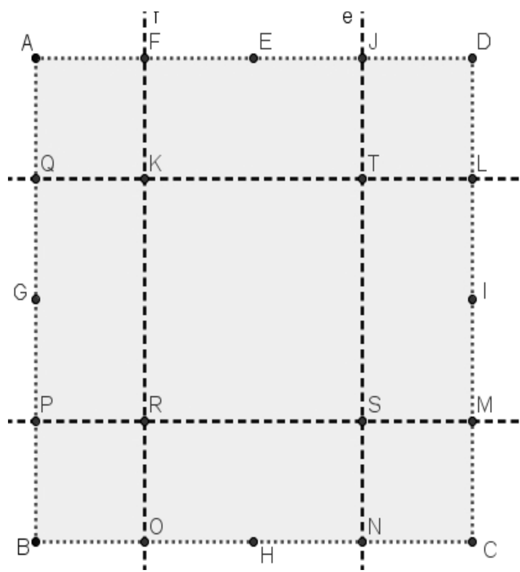
2) Marcar os pontos médios entre cada vértice e o ponto médio do lado do quadrado..



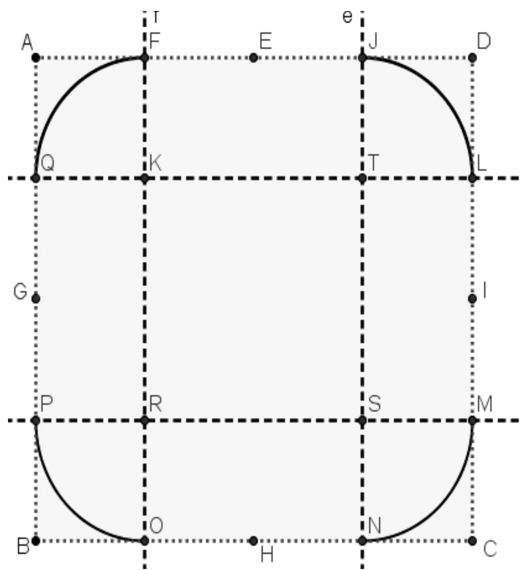
3) Unir por retas os pontos que distam ¼ do lado, a partir do vértice, que se encontram nos lados paralelos do quadrado.



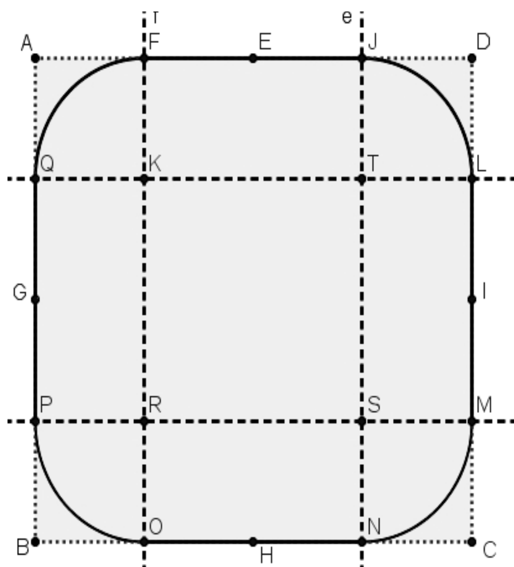
4) Marcar, nas interseções dessas retas, os pontos que serão os centros dos arcos de concordância.



5) Traçar os arcos ***FQ*** de centro em ***K***, ***LJ*** de centro em ***T***, ***NM*** de centro ***S*** e ***PO*** de centro ***R***.



6) Unir, por segmento de reta, os pontos de concordância que estão sobre o mesmo lado do quadrado.



d) **<u>Fazer o retrospecto da solução alcançada:</u>**

O retrospecto foi feito na construção do roteiro descrito nos itens b e c.



PARE E PENSE

1) Por que não foi necessário traçar a corda do arco de concordância ?

2) E se não fosse um quadrado, mas um retângulo? Haveria necessidade de traçar a corda?

3) Existe uma outra forma de fazer esta construção?



ATENÇÃO

Apesar de reconhecer que o Geogebra é uma mídia muito rica de recursos, é imprescindível que você faça as construções usando régua e compasso.

Lembre-se de que esses dois instrumentos são os principais em **Construções geométricas**. Os esquadros e transferidor servem apenas para agilizar as construções.



TAREFA

Refaça a construção, usando o Geogebra.

3) Unir o ponto *B* de um segmento *AB* dado, por uma curva sinuosa (2 arcos concordados), a um ponto *C* fora da reta *AB*, também dado.

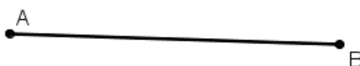


ATENÇÃO

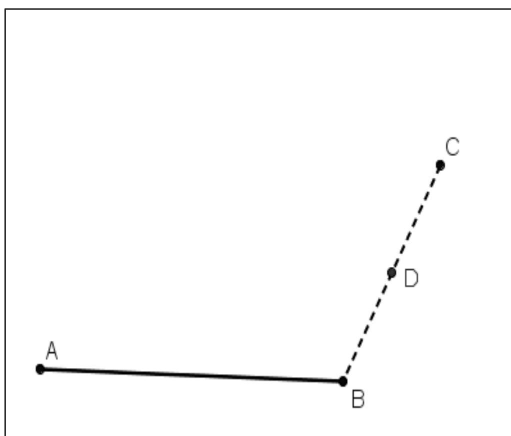
Nestes problemas não faremos as etapas da heurística de Pólya. Apresentaremos direto o roteiro da construção.

1) Os elementos da condição inicial desta construção são o segmento de reta ***AB*** e o ponto ***C***.

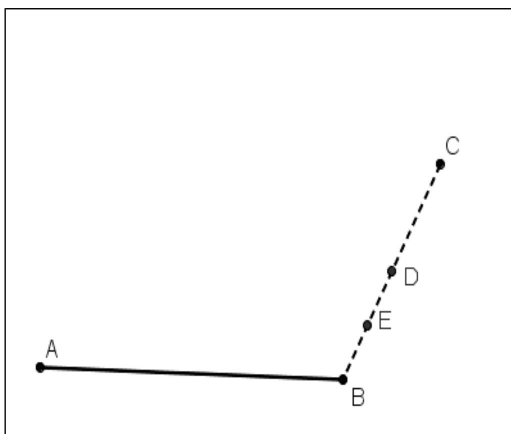
C



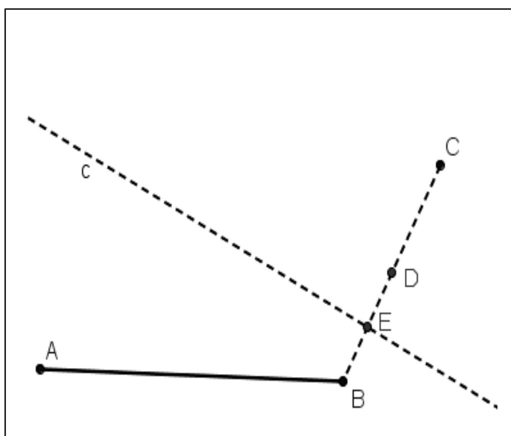
2) Unir os pontos ***B*** e ***C*** por segmento de reta e marcar o ponto médio, que é o ponto de concordância dos arcos.



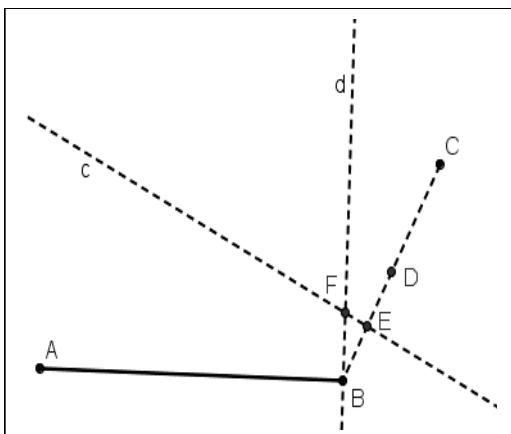
3) Marcar o ponto ***E***, médio de ***DB***.



4) Traçar a reta ***c***, perpendicular ao segmento ***DB*** pelo ponto ***E***.



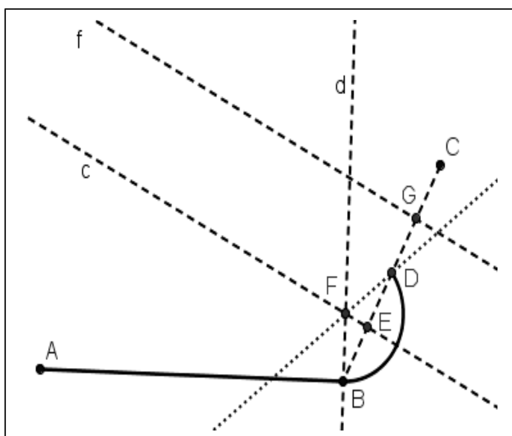
5) Traçar a reta ***d***, perpendicular ao segmento ***AB*** pelo ponto ***B***. Na interseção da reta ***c*** com a reta ***d***, marcar o ponto ***F***, centro do primeiro arco.



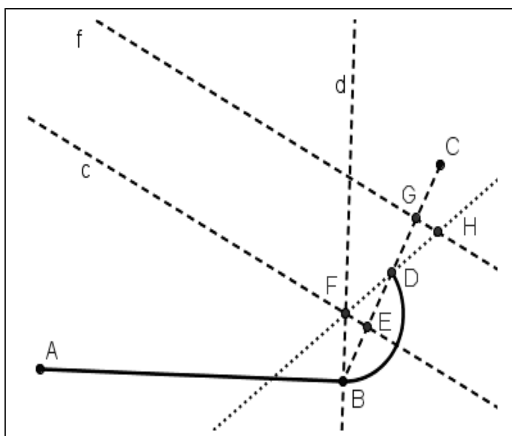
6) Traçar o primeiro arco.

7) Traçar a reta ***f*** mediatriz de ***DC***.

8) Unir por reta os pontos ***F*** e ***D***.



9) Marcar o ponto ***H*** na interseção da reta ***f*** (mediatriz de ***CD***) com a reta ***FH***. O ponto ***H*** é o centro do segundo arco.



10) Traçar o segundo arco, com centro em ***H***.



Antes de continuar:

1) Faça a construção acima, usando régua, compasso e esquadro, como foi feito nas construções anteriores.

2) Faça a construção acima no Geogebra.

3) Faça uma análise do roteiro das construções apresentadas, baseando-se na três regras de concordância e justifique as construções dos conjuntos de passos (a) 4 e 5 e (b) 7,8 e 9.



ATENÇÃO

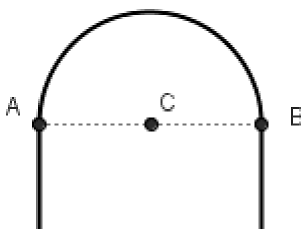
Os próximos exercícios de construção têm por objetivo levá-lo a praticar construções geométricas a partir de roteiros encontrados em livros. Dessa forma, trabalha-se a linguagem geométrica, convertendo o texto em construção. Um exercício complementar é buscar nas construções as regras de concordância. Nesses exercícios, a observação, interpretação e análise do roteiro e da figura, de forma concomitante, são imprescindíveis.



TAREFA

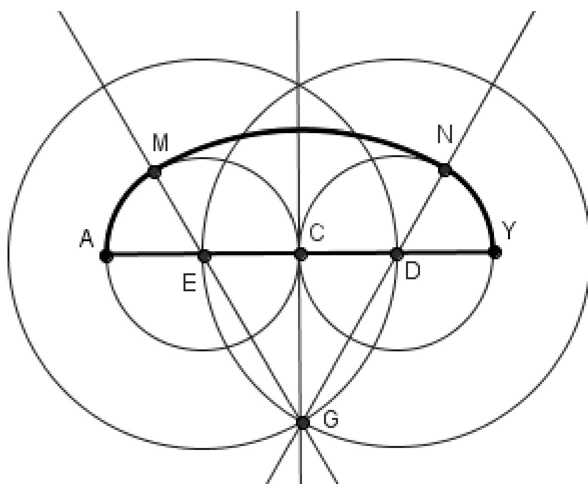
1) Problema – Construir um arco pleno sendo dado o vão *AB*.

Solução: Basta traçar a semicircunferência cujo diâmetro é o vão. (GIONGO, 1969, p.27)



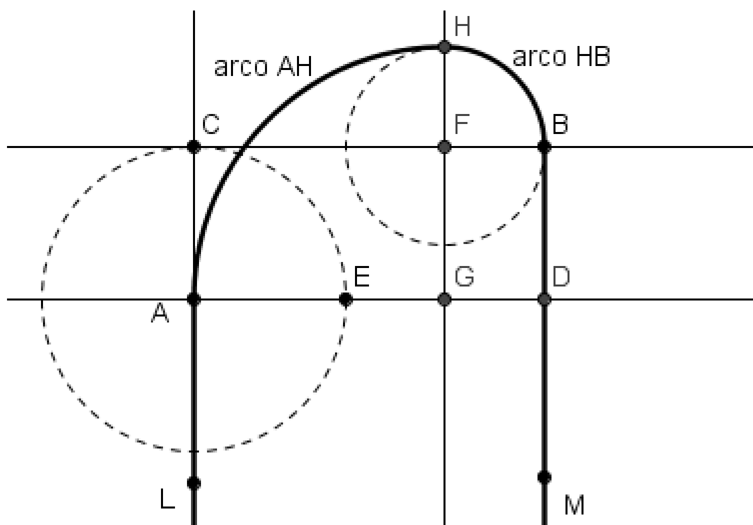
2) Problema – Traçar uma curva de três centros, chamada "asa de balaio" - ATENÇÃO: tome cuidado durante a construção, pois o texto da solução está impreciso, exigindo observação atenta da figura.

Solução: Sobre um segmento ***AY***, como diâmetro, tracem-se duas circunferências de centros ***E*** e ***D***, uma tangente à outra no ponto ***C***; construa-se com o segmento ***ED*** um triângulo equilátero ***EGD***; prolonguem-se os lados ***GEM*** e ***GDN*** e assim teremos os seguintes centros, raios e arcos: ***E***, raio ***EA***, arco ***AM***; ***G***, raio ***GM***, arco ***MN***; e ***D***, raio ***DN***, arco ***NY***; assim se completa a curva pedida. (BRAGA, 1958, p.161)



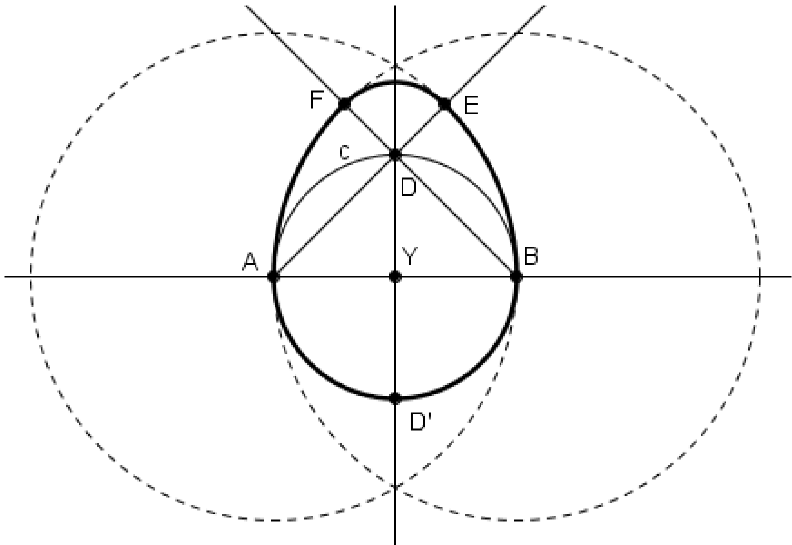
3) **Problema – Construir um arco aviajado, dados os pontos de nascença *A* e *B*, pertencentes às semirretas *AL* e *BM* que são paralelas.**

Solução: Cria-se uma linha de suporte ou apoio prolongando a semirreta ***AL***. Traçam-se por ***A*** e por ***B*** perpendiculares à linha de suporte. A distância ***AC*** é transportada de ***A*** até ***E***. Levanta-se uma perpendicular a ***ED*** por seu ponto médio ***G***, que corta em ***F*** a reta ***CB***. Os pontos ***G*** e ***F*** são os centros respectivos dos arcos ***AH*** e ***HB.*** Adaptado de Penteado (1960, p.151).



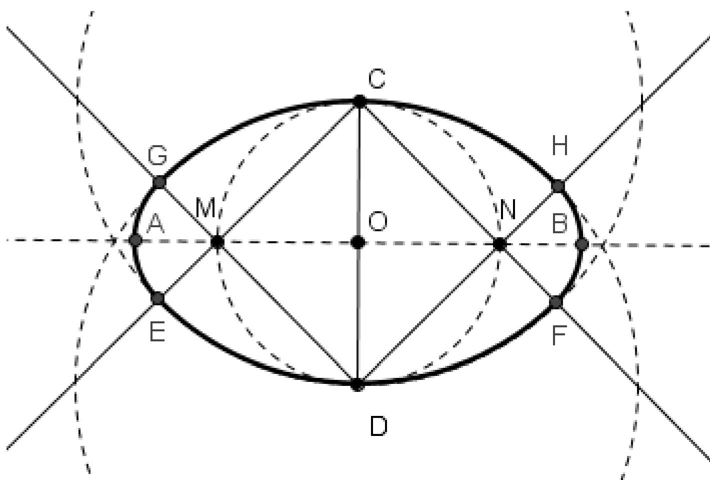
4) Problema – Dados uma circunferência e seu centro, construir, por concordância de arcos, um óvulo ou oval de 4 centros.

<u>Solução:</u> Na circunferência ***c***, traçar os dois diâmetros ***AB*** e ***D'D***, perpendiculares um ao outro, prolongando-os; depois, liga-se ***A*** a ***D*** e prolonga-se; fazendo centro em ***A*** e com raio ***AB*** descreve-se o arco ***BE***; liga-se ***B*** a ***D*** e prolonga-se; fazendo centro em ***B*** e com raio ***BA***, descreve-se o segundo arco ***AF***; depois com centro em ***D*** e raio ***DE*** traça-se o terceiro arco ***EF***. O arco ***AD'B*** é semicírculo da circunferência ***c***, mas pode-se reforçar sua linha para destacar a oval. Adaptado de Braga (1958, p.152).



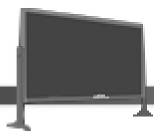
5) Problema – Dado segmento de reta CD, eixo menor, traçar uma oval regular alongada (falsa elipse).

Solução: Tomamos ***CD*** como diagonal de um quadrado. Para isso, traçamos a mediatriz de ***CD*** e fazemos ***OM***=***ON***=***OC***. Com centro em ***C*** e raio ***CD*** traçamos o arco ***EDF***. Com centro em ***D***, o arco, ***GCH***; com centro em ***M***, o arco ***GAE***, com centro em ***N***, o arco ***HBF***. Adaptado de Giongo (1969, p.66).



Encerrando o tópico

Encerramos mais um tópico do curso. As concordâncias têm um apelo estético muito grande, apesar de serem construções mais elaboradas e exigirem um domínio maior de técnicas de construções e de conhecimento matemático mais profundo. Muitos símbolos e logomarcas que encontramos em nosso dia a dia utilizam as concordâncias em suas construções.



SALA DE AULA

Neste tópico utilizamos vários roteiros pré-definidos, mudando um pouco a estratégia utilizada até então. Como você poderia utilizar alguns roteiros em sala de aula e ainda mobilizar os conhecimentos matemáticos de seus alunos?

CÔNICAS[5]

As cônicas são curvas obtidas por meio de secções do cone por um plano. A partir desses cortes, podem-se obter circunferências, elipses, hipérboles e parábolas, porém neste tópico focaremos apenas a elipse, a hipérbole e a parábola.

Para cada uma dessas cônicas, faremos:

1. O *traçado mecânico* obtido por meio de um mecanismo físico, construído com materiais simples (alfinetes, barbantes, régua, cola etc.) a partir da definição Matemática da cônica;

2. O traçado a mão livre a partir de pontos obtidos por construções com régua e compasso;

3. A construção no GeoGebra usando o recurso de visualizar o rastro de pontos para observar o lugar geométrico.

As cônicas aparecem frequentemente no cotidiano:

- Os planetas giram em torno do Sol numa trajetória cuja forma é uma elipse.
- A forma de um jato líquido contínuo ou o lançamento de uma bola é parabólica.

---

5 Este tópico foi escrito com a Profª Kelly Maria de Campos Fornero Abreu de Lima Melillo, mestra em Educação Matemática, pela Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, doutoranda em Educação na linha de Educação Matemática, pela Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG e professora de Matemática do Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais – COLTEC. O estudo das cônicas a partir de construções mecânicas é utilizado por ela em suas aulas no Ensino Médio.

- Na óptica, com espelhos parabólicos usados nos telescópios refletores, faróis e holofotes.
- Na Engenharia, para construção de pontes, são usadas estruturas parabólicas.



Ponte JK, Brasília. **Fonte:** http://fotosbsb.com.br/photo/45-ponte-jk-ao-amanhecer/

Algumas definições

Para nosso estudo das cônicas é importante distinguir os verbos **traçar** e **construir**:

Traçar é executar um traço contínuo representando a cônica. É impossível construir a cônica com régua e compasso, pois elas não podem ser obtidas pela concordância de segmentos de retas com arcos de circunferências (veja a construção da *falsa elipse* no capítulo sobre concordância). Todavia existem processos mecânicos para o traçado das cônicas.

<u>**Construir**</u> é obter, com régua e compasso, os pontos pertencentes à cônica e, a seguir, é traçado à mão livre uma linha que passe por eles formando a cônica desejada.

Além disso é importante definir **lugar geométrico**, pois muitos dos problemas de construção geométricas podem ser desenvolvidos a partir desta definição.



Em diversas partes desse guia, nós já definimos e trabalhamos com *lugar geométrico*.

Recebe o nome de **lugar geométrico** dos pontos que possuem uma propriedade ***P*** a figura que tem estas características:

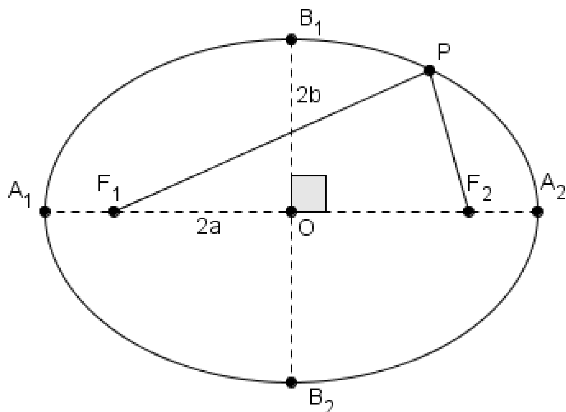
1. Todos os seus pontos satisfazem a propriedade ***P***;
2. Somente os pontos desta figura satisfazem a propriedade ***P***, isto é, se um ponto ***A*** possui a propriedade ***P***, então ele pertence à figura.

Para prosseguir a leitura, tenha em mãos os seguintes materiais:

- Prancheta de apoio (Ex.: papelão);
- Alfinetes;
- Fio flexível (Ex.: fio dental);
- Régua e esquadro;
- Lápis e papel;
- Cola instantânea (Ex.: Super Bonder).

Elipse

É o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, focos da elipse, têm soma constante igual a $2a$.



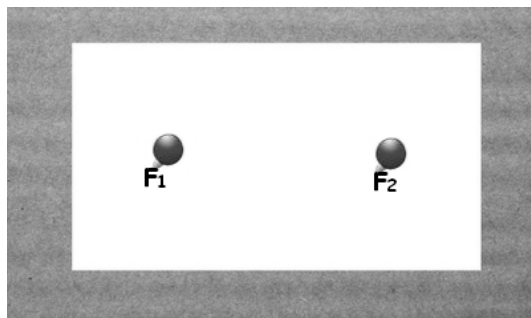
Na figura acima, podemos identificar vários elementos da elipse:

- Ponto O: centro da elipse;
- Pontos F_1 e F_2: focos da elipse;
- Segmento A_1A_2: eixo maior;
- Segmento B_1B_2: eixo maior;
- $2a$: medida do eixo maior (medida do segmento A_1A_2:);
- $2b$: medida do eixo menor (medida do segmento B_1B_2:);
- $2c$: distância focal (medida do segmento F_1F_2:);
- $PF_1+PF_2=2a$.

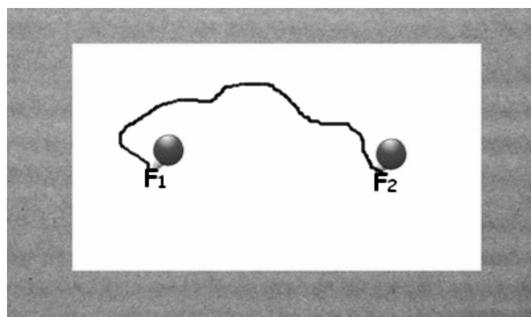
Traçado mecânico da elipse

1) Separar a prancheta de apoio, o papel, dois alfinetes, o lápis e o pedaço de fio.

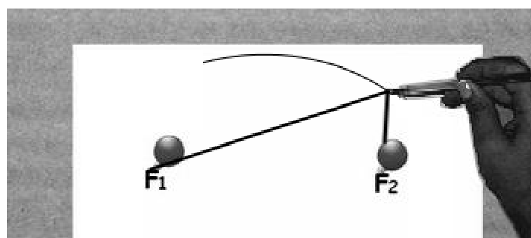
2) Escolher dois pontos F_1 e F_2 (focos da elipse) e cravar os alfinetes nesses pontos.



3) Amarrar cada uma das extremidades do pedaço do fio aos alfinetes, deixando-o folgado.



4) Percorrer a elipse, com a ponta do lápis, mantendo o fio esticado.





PARE E PENSE

1) Utilizando a definição diga: por que o mecanismo apresentado descreve uma elipse?

2) Refaça a elipse mudando o comprimento do fio. Explique o que aconteceu?

3) Na figura construída mecanicamente identifique, desenhando sobre ela, os seguintes elementos: os focos, a distância focal, o eixo maior, o eixo menor e o centro da elipse.

Construção com régua e compasso

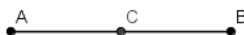
1) Construir, em uma folha de papel, um segmento ***AB***, de comprimento qualquer.



2) Marcar, em uma reta suporte ***r***, pontos F_1 e F_2, de modo que a distância entre F_1 e F_2 seja menor que o comprimento do segmento ***AB***.



3) Marcar o ponto ***C***, ponto médio de ***AB***, e o ponto ***D***, ponto médio de F_1F_2 .

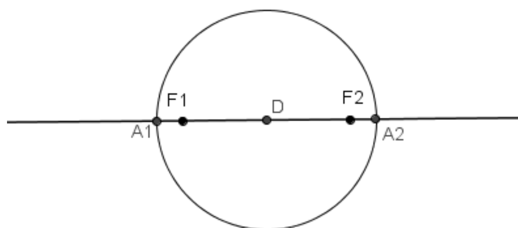




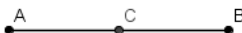
4) Construir, com centro em ***D*** e raio ***AC***=***CB***, uma circunferência. Marcar, nas interseções entre a circunferência e a reta suporte, os pontos A_1 e A_2 .

Note que $A_1A_2=AB=2a$.



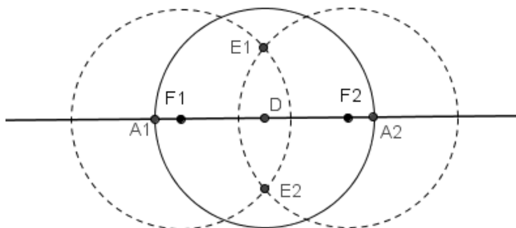


5) Construir, com centro em F_1 e raio $AC=CB$, uma circunferência.

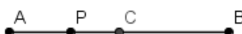


6) Construir, em seguida, construa outra circunferência, de mesmo raio, com centro em F_2.

7) Marcar os pontos de interseção entre essas duas circunferências e nomeá-los por E_1 e E_2.

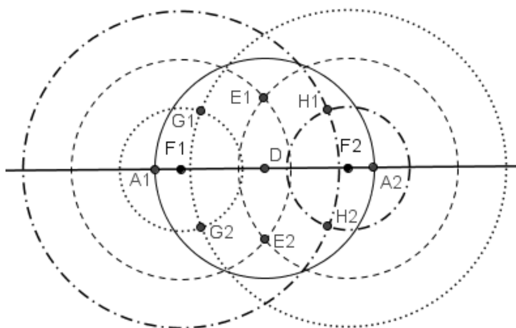


8) Considerar um ponto P, qualquer, no segmento AB.



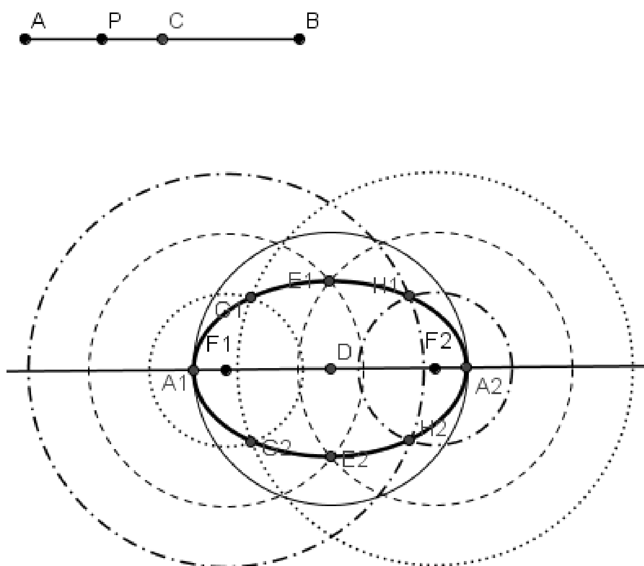
9) Construir duas circunferências, respectivamente, com centro em F_1 e raio AP e com centro em F_2 e raio PB. Marcar, na interseção das duas, os pontos G_1 e G_2.

10) Construir duas circunferências, respectivamente com centro em F_1 e raio PB e centro em F_2 e raio AP. Marcar, na interseção das duas, os pontos H_1 e H_2.



11) Repetir os passos 8, 9 e 10, para pontos aleatórios P'; P''; P''' , … em AB.

12) Traçar, a mão livre, a curva que liga os pontos de interseção encontrados: $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{H_1}$, …, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{G_2}$, $\boldsymbol{H_2}$... .





PARE E PENSE

1) A elipse é o conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ é constante. Portanto, considere constante o comprimento ***AB***. Por que $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{E_1}$ e $\boldsymbol{E_2}$ pertencerão à elipse que desejamos construir? O que esses pontos definem?

2) Por que os pontos de interseção $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, dos passos 9 e 10 pertencerão à elipse?

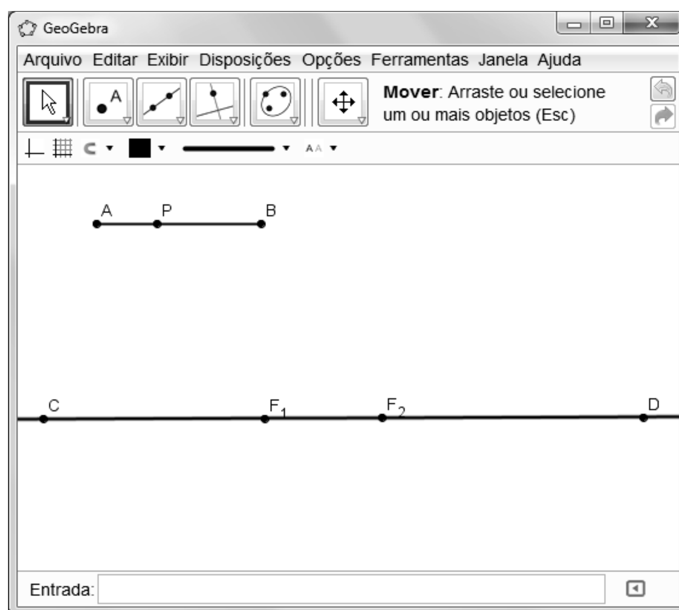
Construção com GeoGebra

Existem diversas construções de elipse que podem ser feitas em programas de Geometria Dinâmica. Por uma questão de didática, adotaremos o mesmo princípio usado na construção mecânica e na construção com compasso e régua.

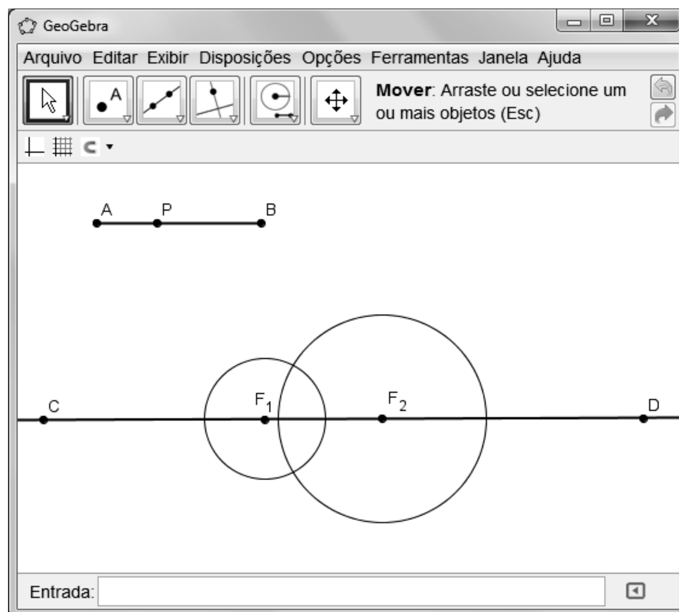
Nas construções das cônicas, utilizaremos o recurso de **rastro de ponto** do GeoGebra. Com ele, podemos desenhar o caminho ou trilha feito por um objeto da construção, como um ponto ou uma reta, possibilitando a visualização do lugar geométrico desse objeto.

1) Construir um segmento ***AB***, de comprimento aleatório ***2a***, e marcar sobre ele um ponto ***P***.

2) Construir uma reta auxiliar ***r*** e marcar sobre ela os pontos F_1 e F_2, de modo que distância entre F_1 e F_2 seja menor do que ***2a*** (menor que a medida do segmento ***AB***).

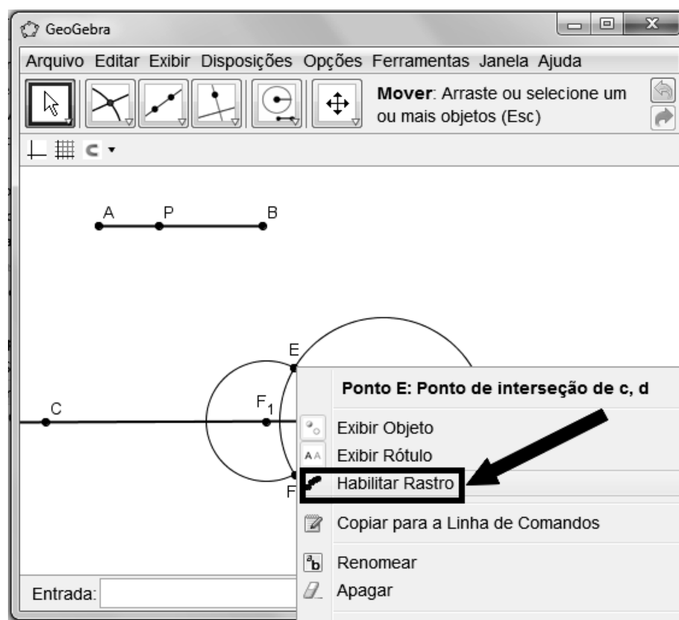


3) Construir, usando a ferramenta **Compasso**, uma circunferência com centro em F_1 e raio ***AP***, e outra com centro em F_2 e raio ***PB***.

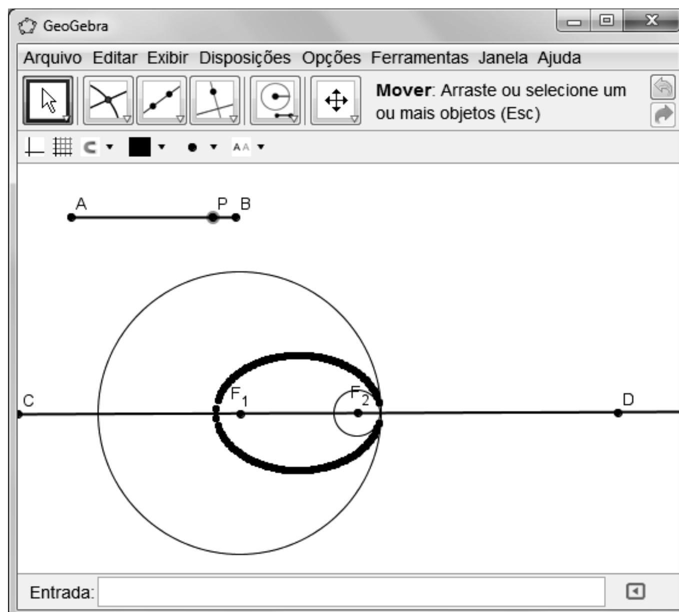


4) Marcar dois pontos, ***E*** e ***F***, nas interseções das duas circunferências.

5) Clicar, com o botão direito do *mouse*, sobre o ponto ***E*** e marcar a opção **Habilitar rastro**. Repetir a ação para o ponto ***F***.



6) Movimentar o ponto ***P*** e observar o lugar geométrico construído pelos rastros dos pontos ***E*** e ***F***.





PARE E PENSE

1) Qual o elo entre as construções feitas com as 3 mídias (mecânica, compasso e régua e GeoGebra)?

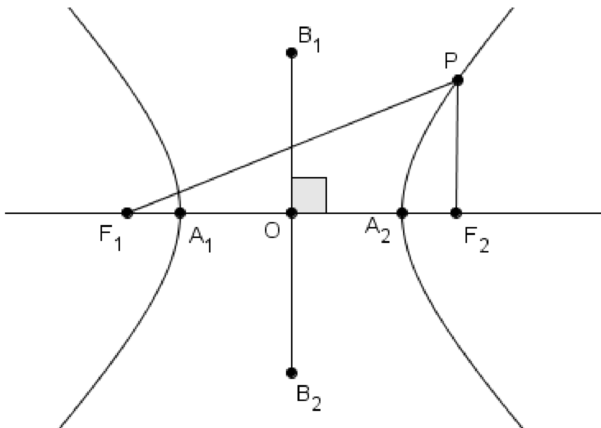
2) Como você identifica, na construção com o GeoGebra, os elementos da elipse (foco, eixo maior, eixo menor, distância focal, e excentricidade)?

3) Como você usaria esta construção para mostrar ao seu aluno como esses elementos influenciam a forma da elipse?

Hipérbole

É o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, focos da hipérbole, em ***módulo*** têm a diferença constante igual a $2a$.

Módulo ou valor absoluto: Esses termos são usados na Matemática quando se deseja considerar apenas o valor. Por exemplo: $|5| = 5$ e $|-5| = 5$.



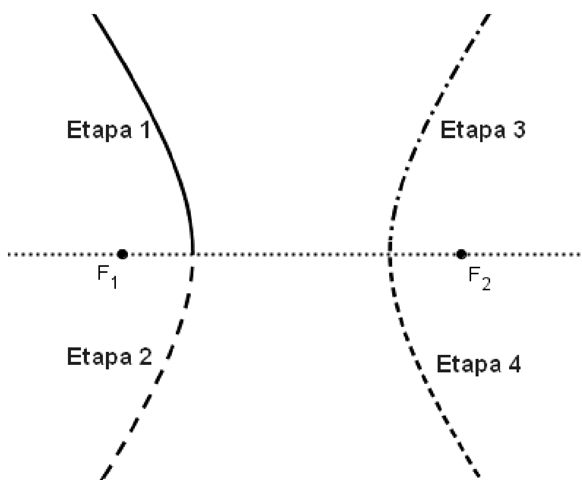
Na figura acima, podemos identificar vários elementos da hipérbole:

- Ponto O: centro da hipérbole;
- Pontos F_1 e F_2: focos da hipérbole;
- Segmento A_1A_2: eixo real ou transverso;
- Segmento B_1B_2: eixo imaginário;

- ***2a***: medida do eixo real (medida do segmento A_1A_2:);
- ***2b***: medida do eixo imaginário (medida do segmento B_1B_2:);
- ***2c***: distância focal (medida do segmento F_1F_2:);
- $|PF_1-PF_2|=2a$ (o módulo da diferença entre as medidas dos segmentos PF_1 e PF_2 é igual à medida do eixo real).

ATENÇÃO

O traçado mecânico da hipérbole é um pouco mais complicado que o da elipse. Na minha experiência, para traçar a hipérbole completa, tive que fazer em quatro etapas, mudando a posição do lápis e a posição do fio na haste do mecanismo em que o fio estava preso. A figura a seguir exemplifica as etapas do traçado.



Para um traçado mais próximo do modelo prototípico de hipérbole, utilize um fio cujo tamanho seja, aproximadamente, 30% maior que a distância focal.

Traçado mecânico

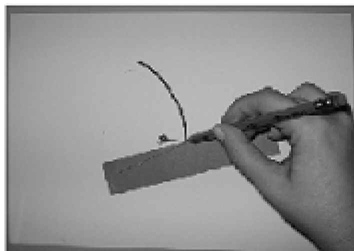
1) Separar prancheta de apoio, papel, dois alfinetes, tira de papel, lápis e um pedaço de fio.



2) Na folha de papel em branco, construir duas retas perpendiculares, que representam os eixos cartesianos.

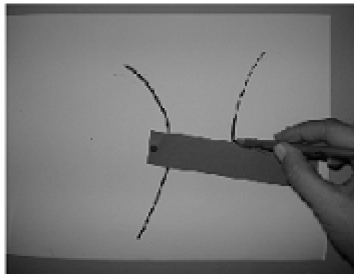
3) Marcar dois pontos F_1 e F_2, simétricos em relação ao eixo y.

4) Colocar um alfinete em um dos furos da tira de papel e cravá-lo no ponto F_1.



5) Prender o pedaço de fio em uma extremidade da tira.

6) Prender o outro extremo do fio, com um alfinete, no ponto F_2.



7) Esticar o fio de modo a encostá-lo na tira de papel. Movimente a tira em torno de F_1 , mantendo a ponta do lápis encostada na folha de papel e mantendo o fio esticado. Pare quando o lápis chegar ao final do fio.

8) Repetir o procedimento colocando o fio (com a mesma medida)

no ponto F_1 e a tira de papel em F_2 , girando-a agora em torno deste ponto.

A figura a seguir, ilustra o mecanismo que construímos e usamos para traçar a **hipérbole**.

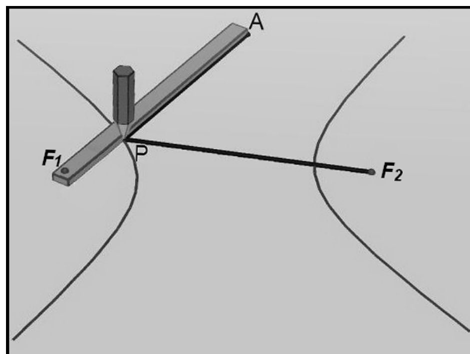


Figura adaptada de
http://www.macchinematematiche.org/images/macchine/coniche/disegni/iperbole filoD.JPG



PARE E PENSE

1) Utilizando a definição, explique por que o mecanismo apresentado descreve uma hipérbole.

2) Refaça a hipérbole mudando o comprimento do fio. Explique o que aconteceu?

3) Na figura construída mecanicamente identifique, desenhando sobre ela, os seguintes elementos: os focos, a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário e o centro da elipse.

Construção com régua e compasso

1) Construir, em uma folha de papel, um segmento ***AB***, de comprimento aleatório ***2a***.



2) Marcar, em seguida, pontos F_1 e F_2 , de modo que a distância entre os pontos F_1 e F_2 seja maior do que ***2a***. Construir, também, uma reta suporte que passe por esses pontos.

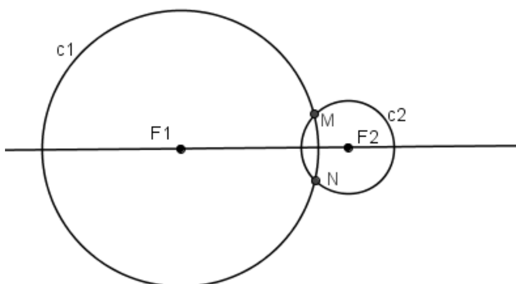


3) Construir uma semirreta ***AB*** e no prolongamento do segmento ***AB***, marcar o ponto ***P***.



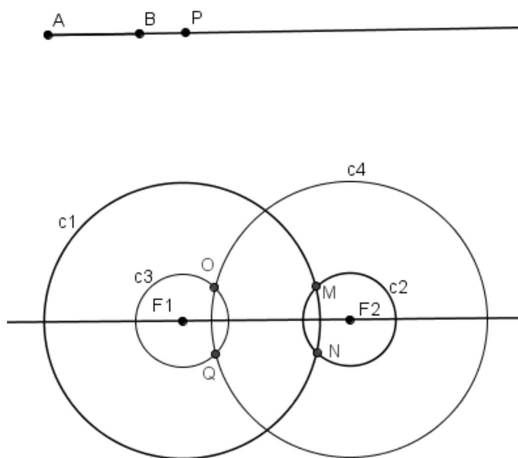
4) Construir as circunferências:
c1: de centro F_1 e raio ***AP***.
c2: de centro F_2 e raio ***BP***.

5) Marcar os pontos ***M*** e ***N***, pontos de interseção entre as circunferências ***c1*** e ***c2***.



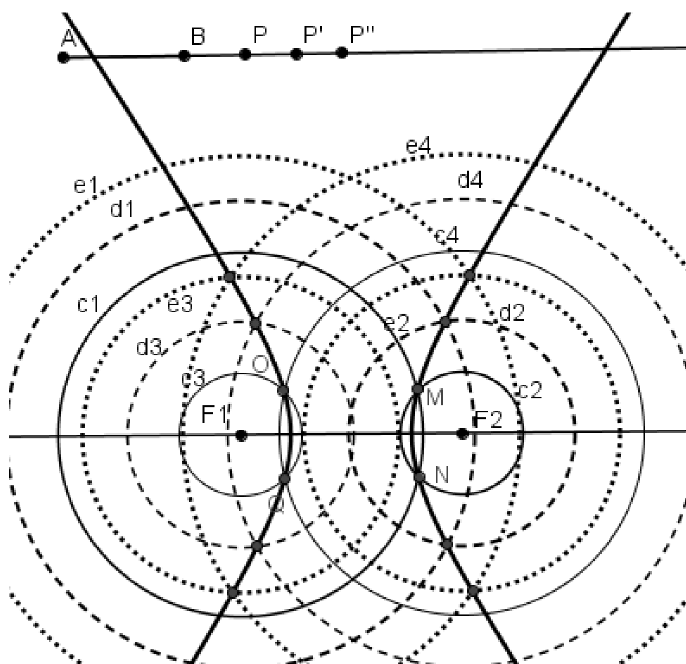
4) Construir as circunferências:
c3: de centro F_1 e raio ***BP***.
c4: de centro F_2 e raio ***AP***.

5) Marcar os pontos ***O*** e ***Q***, pontos de interseção entre as circunferências ***c3*** e ***c4***.



6) Repetir os passos 3, 4 e 5 para pontos ***P'***, ***P''***, ***P'''***,..., no prolongamento de ***AB***.

7) Traçar a curva que liga os pontos de interseção encontrados.





PARE E PENSE

1) Diga, com base na definição de circunferência e hipérbole, por que os pontos de interseção encontrados pertencem à hipérbole construída com régua e compasso.

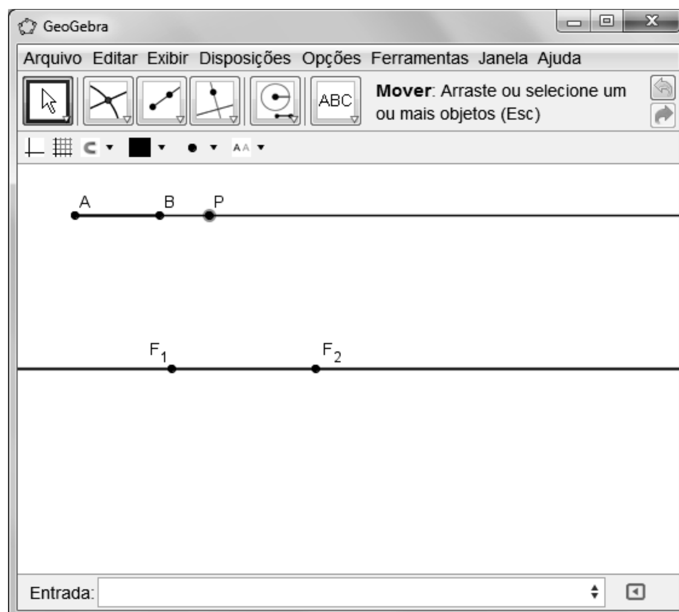
2) Identifique os elementos: focos, distância focal, centro da hipérbole, diretriz, assíntotas e excentricidade.

Construção com GeoGebra

1) Construir um segmento ***AB***, de comprimento aleatório ***2a,***

2) Construir uma semirreta ***AB*** e marcar no prolongamento de ***AB***, um ponto ***P***.

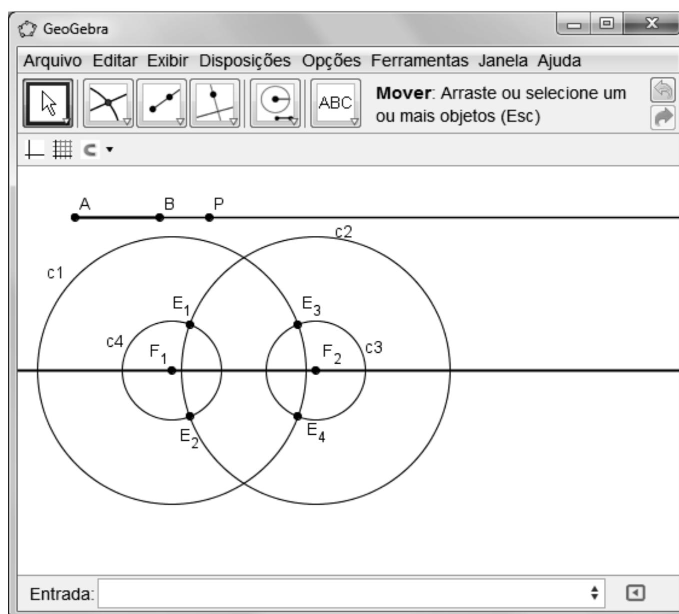
3) Construir uma reta auxiliar ***r*** e marcar sobre ela os pontos F_1 e F_2, de modo que a distância entre F_1 e F_2 seja maior do que ***2a***.



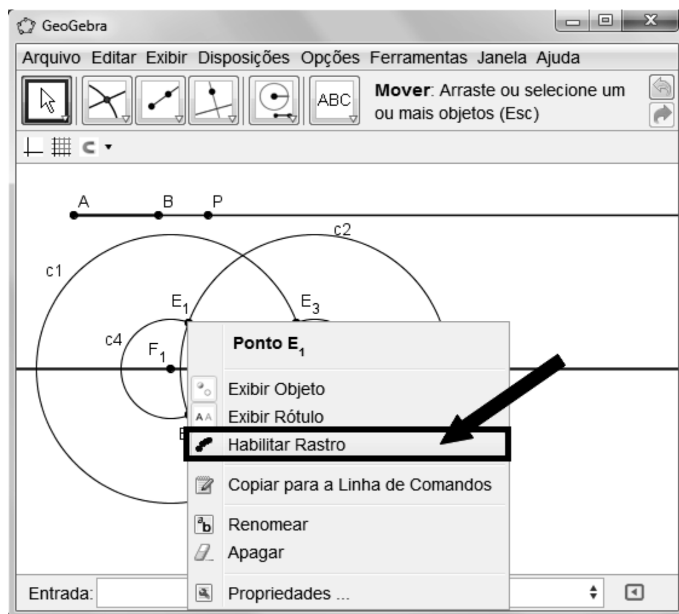
4) Construir, usando a ferramenta **Compasso**, circunferências:

- ***c1***, com centro em F_1 e raio ***AP;***
- ***c3***, com centro em F_2 e raio ***BP;***
- ***c2***, com centro em F_2 e raio ***AP;***
- ***c4***, com centro em F_1 e raio ***BP.***

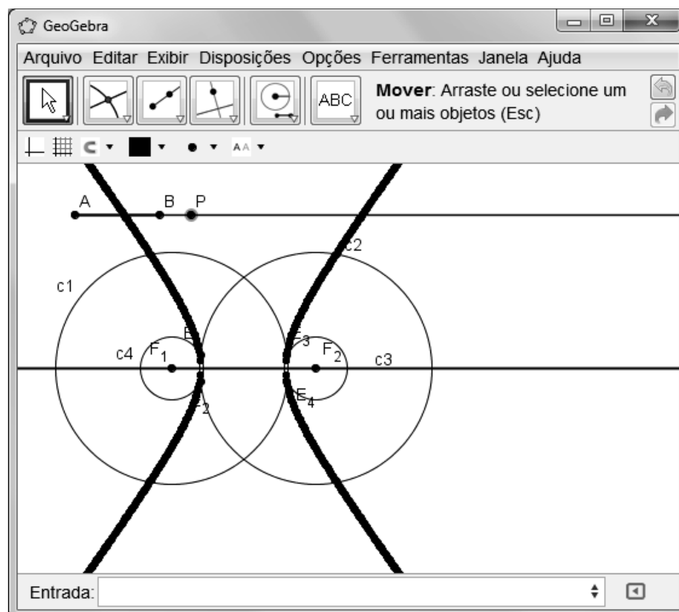
5) Marcar, nas interseções de ***c2*** com ***c4***, e de ***c1*** com ***c3***, respectivamente, os pontos E_1, E_2, E_3 e E_4.



6) Clicar, com o botão direito do *mouse*, sobre o ponto E_1 e marcar a opção **Habilitar rastro**. Repetir a ação para os pontos E_2 , E_3 e E_4 .



7) Movimentar o ponto ***P*** e observar o lugar geométrico construído pelos rastros dos pontos E_1, E_2, E_3 e E_4.





PARE E PENSE

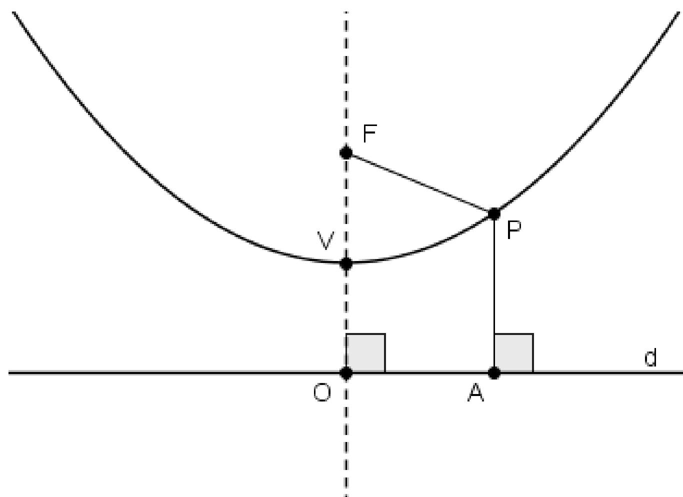
1) Qual o elo entre as construções feitas com as 3 mídias (mecânica, compasso e régua e o GeoGebra)?

2) Como você identifica, na construção com o GeoGebra, os elementos da hipérbole (focos, distância focal, centro da hipérbole, diretriz, assíntotas e excentricidade)?

3) Como você usaria essa construção para mostrar ao aluno como esses elementos influenciam a forma da hipérbole?

Parábola

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam, ou seja, possuem a mesma distância, de um ponto fixo ***F*** e de uma reta ***d***. O ponto fixo ***F*** é o foco da parábola e a reta ***d*** é chamada diretriz da parábola.



Na figura acima, podemos identificar vários elementos da parábola:

- Pontos ***F*** : foco da parábola;
- Pontos ***V*** : vértice da parábola;
- Reta ***d***: diretriz da parábola;
- Reta ***VF*** : eixo de simetria da parábola;
- ***PF=PA***;
- ***d⊥VF*** (a reta diretriz é perpendicular ao eixo de simetria);

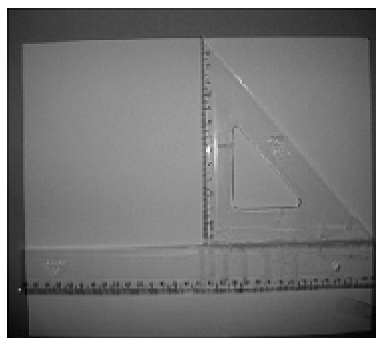


ATENÇÃO

O traçado mecânico da parábola, por uma questão de funcionalidade, pode ser feito em duas etapas: o lado direito da parábola, até o eixo de simetria, e o lado esquerdo da parábola, até o eixo de simetria.

Traçado mecânico

1) Separar folha de papel em branco, alfinete, prancheta de apoio, esquadro, régua, cola, lápis e pedaço de fio.



2) Colocar a folha de papel na prancheta de apoio.

3) Colar o esquadro à régua, como mostrado na figura.

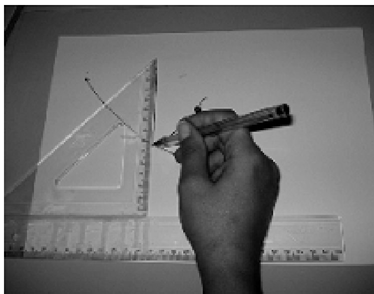
4) Marcar, com o lápis, um ponto ***F*** e traçar uma reta ***d***.

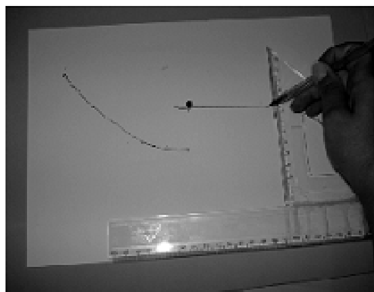
5) Colocar a régua sobre a reta ***d*** de tal forma que o esquadro e o ponto ***F*** fiquem no mesmo semiplano, como mostra a figura.

6) Prender com cola um pedaço de fio, de comprimento igual ao lado do esquadro que não está colado na régua ao vértice do esquadro que está fora da régua.

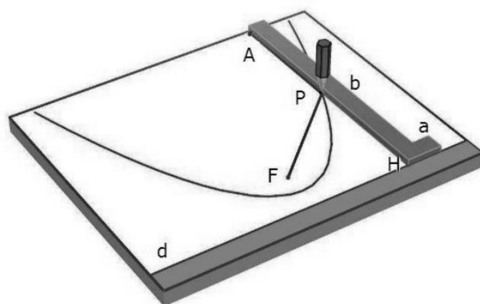
7) Prender com um alfinete a outra extremidade do fio no ponto ***F***.

8) Com a ponta do lápis, mantendo o fio bem esticado e encostado no esquadro, deslizar o esquadro/régua mantendo a borda sobre a reta ***d***, traçando a curva.





A figura a seguir, ilustra o mecanismo que construímos e usamos para traçar a **parábola**.



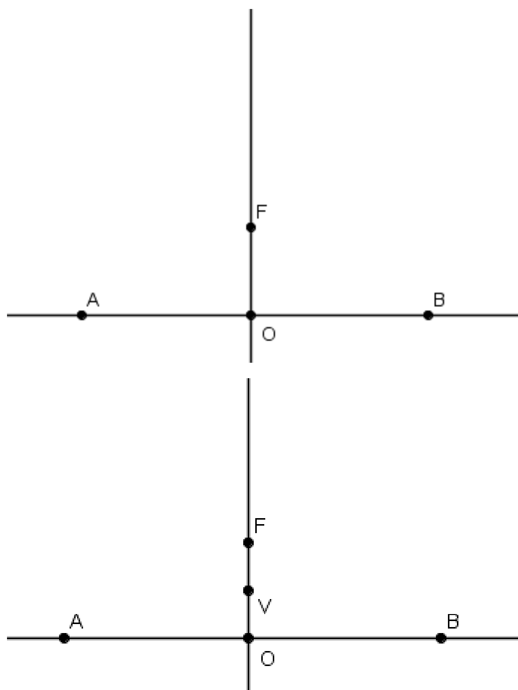
<u>Fonte:</u> http://fotosbsb.com.br/photo/45-ponte-jk-ao-amanhecer/

Construção com régua e compasso

1) Construir, em uma folha de papel, uma reta ***AB*** e marcar nela um ponto ***O***.

2) Constrir, em seguida, uma reta ***r***, perpendicular à reta ***AB*** passando por ***O***, e marcar sobre ***r*** o ponto ***F***, foco da parábola.

3) Construir o ponto ***V***, ponto médio de ***F*** e ***O***, vértice da parábola.

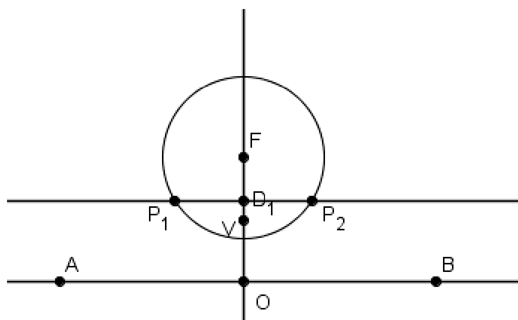




PARE E PENSE

Por que se pode afirmar que o ponto ***V***, ponto médio de ***OF***, pertence à parábola? Que ponto é esse?

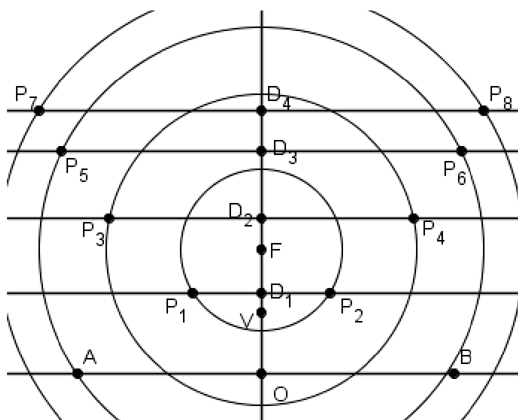
4) Marcar um ponto $\boldsymbol{D_1}$ na semirreta ***VF***. Traçar, em seguida, uma reta ***s*** paralela à reta ***AB***, passando pelo ponto $\boldsymbol{D_1}$.



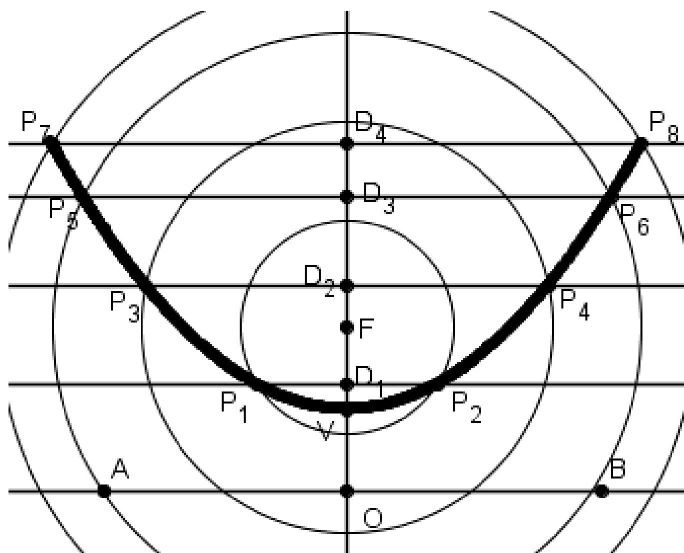
5) Traçar uma circunferência, com centro em ***F*** e raio $\boldsymbol{OD_1}$.

6) Marcar os pontos $\boldsymbol{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ na interseção da circunferência com a reta ***r***.

7) Repetir os passos 4, 5 e 6 para pontos $\boldsymbol{D_2}$, $\boldsymbol{D_3}$, $\boldsymbol{D_4}$, ...



7) Traçar a curva que liga os pontos encontrados a partir das interseções das retas paralelas a ***AB*** e das circunferências de centro ***F***. Essa curva é a parábola.





PARE E PENSE

1) Diga, com base nas definições de circunferência e parábola, por que os pontos de interseção encontrados pertencem à parábola construída com régua e compasso.

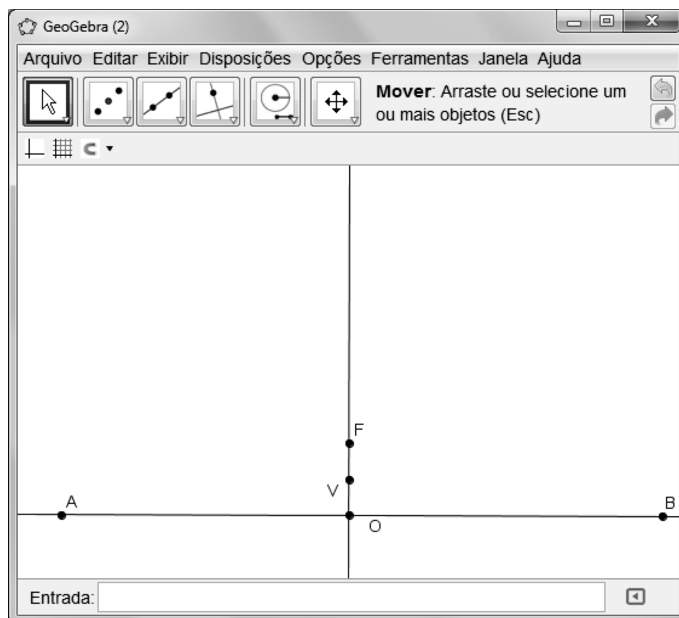
2) Identifique os elementos: foco, vértice, diretriz e eixo de simetria.

Construção com Geogebra

1) Construir uma reta ***AB*** e marcar sobre ela um ponto ***O***.

2) Construir uma reta perpendicular à reta ***AB*** passando pelo ponto ***O.*** Marcar sobre ela um ponto ***F***, foco da parábola.

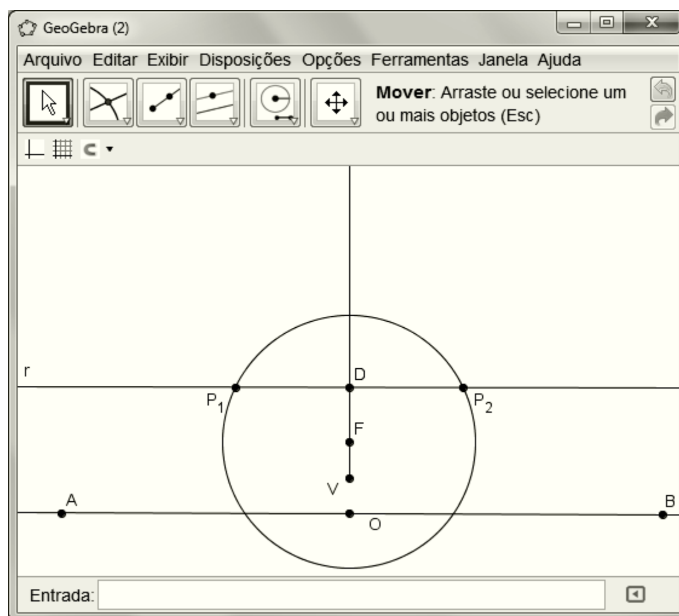
3) Construir o ponto ***V***, ponto médio de ***O*** e ***F***, vértice da parábola.



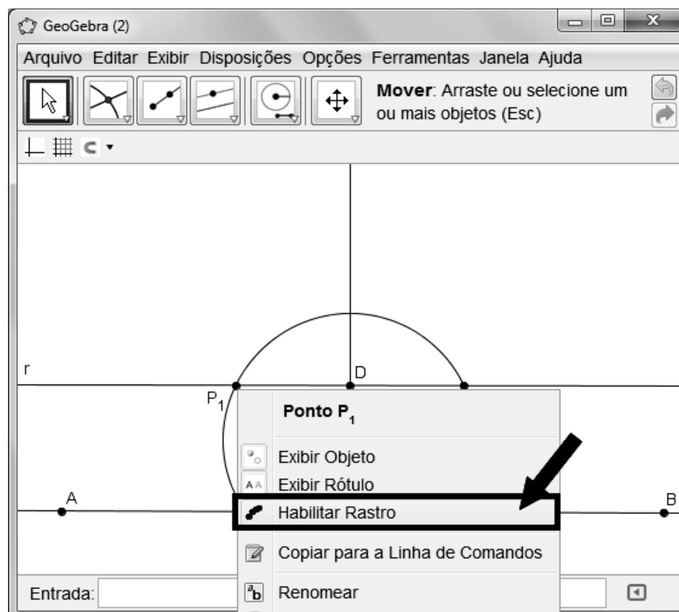
4) Ocultar a reta ***FO***. Construir, em seguida, a semirreta ***VF*** e marcar sobre ela um ponto ***D***.

5) Construir uma reta ***r***, paralela à reta ***AB***, passando pelo ponto ***D***.

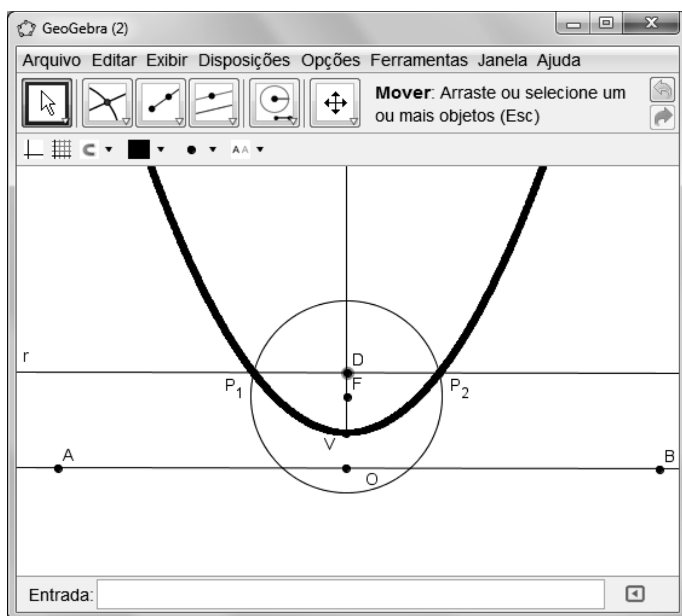
6) Construir, usando a ferramenta **Compasso**, uma circunferência de raio ***OD*** com centro em ***F*** . Marcar os pontos P_1 e P_2 na interseção dessa circunferência com a reta ***r***.



7) Clicar, com o botão direito do *mouse*, sobre o ponto P_1 e marcar a opção **Habilitar rastro**. Repita essa ação para o ponto P_2.



8) Movimentar o ponto ***D*** e observar o lugar geométrico construído pelos rastros dos pontos $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$.





ATENÇÃO

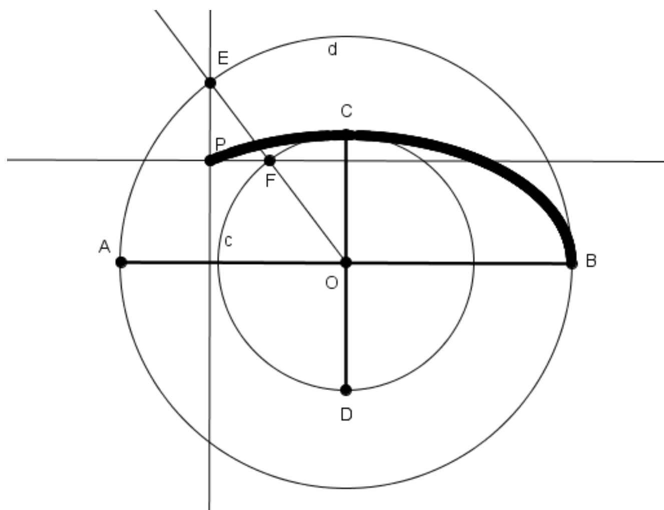
Os próximos exercícios de construção têm por objetivo levá-lo a praticar construções geométricas a partir de roteiros. Dessa forma, trabalha-se a linguagem geométrica, convertendo o texto em construção.



TAREFA

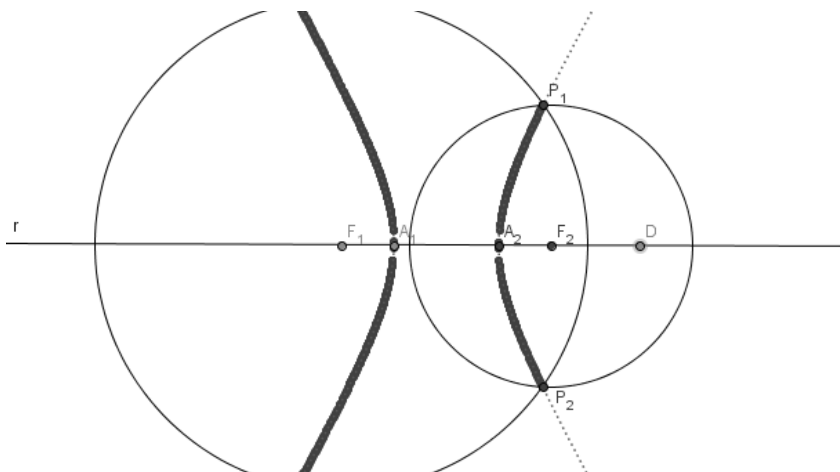
1) **Problema – Dados os segmentos *AB* e *CD*, respectivamente eixos maior e menor de uma elipse, fazer a construção dinâmica que permita visualizar o lugar geométrico do ponto *P* que pertença à elipse.**

<u>**Solução:**</u> Marcar um ponto ***O*** na interseção dos dois eixos; construir uma circunferência ***c*** , com centro em ***O*** e raio ***OC***; construir uma circunferência ***d***, com centro em ***O*** e raio ***OA***; marcar, sobre a circunferência ***d***, um ponto ***E***; unir os pontos ***OE*** por uma semirreta, marcar, na interseção da semirreta ***OE*** com a circunferência ***c***, o ponto ***F***; construir uma perpendicular à ***CD*** passando por ***F*** e uma perpendicular à ***AB*** passando por ***E***; marcar o ponto ***P*** na interseção das duas retas construídas; ativar o rastro do ponto ***P***; mover o ponto ***E***, observando o lugar geométrico traçado pelo ponto ***P***.



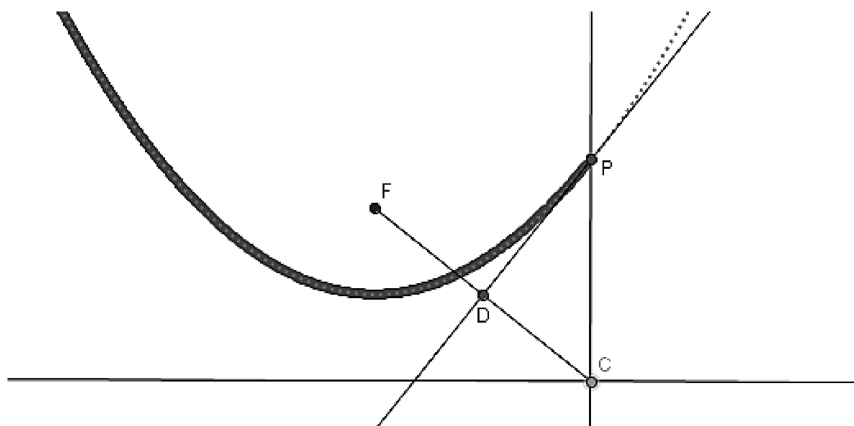
2) Problema – Dados os pontos F_1, F_2, A_1, A_2 e a reta r, respectivamente focos, vértices e eixo de simetria que contêm os focos de uma hipérbole, fazer a construção dinâmica que permita visualizar o lugar geométrico do ponto P que pertença à hipérbole.

Solução: Marcar um ponto D sobre a reta F_1F_2 ; construir uma circunferência, raio DA_1 e centro F_1; construir uma circunferência, raio DA_2 e centro F_2; marcar, nas interseções das circunferências, os pontos P_1 e P_2 ; ativar o rastro dos pontos P_1 e P_2; mover o ponto D, observando o lugar geométrico traçado pelos pontos P_1 e P_2.



3) **Problema – Dados o ponto *F* e a reta *r*, respectivamente foco e diretriz de uma parábola, fazer a construção dinâmica que permita visualizar o lugar geométrico do ponto *P* que pertença à parábola.**

<u>**Solução:**</u> Marcar um ponto ***C*** sobre a reta ***r***; unir por segmento de reta os pontos ***F*** e ***C***; construir o ponto ***D***, ponto médio de ***FC***; traçar a reta s, mediatriz de ***FC***; construir uma reta ***t***, perpendicular à reta ***r***, passando pelo ponto ***C***; marcar, na interseção das retas ***s*** e ***t***, o ponto ***P***; ativar o rastro do ponto ***P***; mover o ponto ***C***, observando o lugar geométrico traçado pelo ponto ***P***.





SAIBA MAIS

O site da ***Associazione "Mathematical Machines"*** possui várias fotografias de máquinas físicas e diversas construções dinâmicas, feitas em programas de Geometria Dinâmica, que traçam e/ou apresentam curvas matemáticas. Todos traçados e construções são acompanhadas das explicações e demonstrações matemáticas.

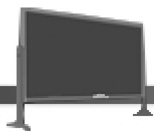
O museu, que abriga fisicamente o acervo dessas máquinas, pertence à Università Degli Studi di Modena e Reggio Emilia-INIMORE, Modena-MO, Itália.

Associazione "Mathematical Machines".

Disponível em: <http://www.macchinematematiche.org>. Acesso em: 26 fev. 2016.

Encerrando o tópico

Neste tópico, procuramos explorar o conceito das cônicas em três momentos: construção mecânica, construção com régua e compasso e construção com GeoGebra. Acreditamos que a visão multifacetada ajuda a compreender melhor o conceito estudado.



SALA DE AULA

Como podem ser estudadas com base no conceito de lugar geométrico, as cônicas permitem, ainda, uma abordagem pela Geometria Analítica. Como faria essa abordagem nas construções propostas?



ENCERRANDO

Com este tópico, encerramos nossos estudos.

Espero que a maneira como este **Guia de estudos** foi organizado e concebido tenha ajudado você durante a disciplina e que o tenha, também, estimulado a continuar estudando **Geometria** e **Construções Geométricas**.

Muitas felicidades!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENEDETTI, Francisco Carlos. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes**. 2003. 316 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 2003.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**. New York: Springer, 2005.

BRAGA, Theodoro. **Problemas de desenho linear geométrico**. São Paulo: Editora LEP, 1958.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me000033.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência Matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática elementar – Geometria Plana**. V. 9. São Paulo: Atual Editora, 2005.

EUCLIDES. **Elementos de Geometria**. Tradução Frederico Commandino. São Paulo: Cultura, 1944. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

FERREIRA, Edson Luiz Cataldo Ferreira; NETO, Francisco Xavier Fontenele, RIOS, Isabel Lugão. **Geometria Básica – Módulo 1**. Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007.

GIONGO, Affonso Rocha. **Curso de desenho geométrico**. Livraria Nobel, 1969.

JESUS, Gilson Bispo de. **Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau . **Curso de Desenho**. São Paulo: Moderna, 1966. 3 v.

MICHAELIS UOL. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br>. Acesso em: 10 ago. 2012.

NACARATO, Adair Mendes; GOMES, Adriana Aparecida Molina; GRANDO, Regina Célia. **Experiência com geometria na escola básica**. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**. Vol. 4. N. 06. Unicamp. Campinas. 1996. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2664/2405>. Acessado em: 17 mar. 2016.

PAIS, Luiz Carlos. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. Caxambu: ANPED, 2000.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PENEIREIRO, João Batista; SILVA, Maurício Fronza da. **Geometria Plana e Desenho Geométrico**. Caderno Didático. Santa Maria: UFSM, 2008. Disponível em <http://w3.ufsm.br/carmen/disciplinas/Geometria/GeometriaPlana.pdf>. Acesso em <19 mar. 2016>

PENHA, Paulo César da. **A desigualdade triangular em diferentes mídias**. IN: Anais do 16° COLE. Campina: ALB, 2007. Disponível em: <http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_03.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

PENTEADO, José Arruda Penteado. **Curso de desenho**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1960.

POLYA, Georgia. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1993. 3 v.

REIS, Jorge H. J. Berredo. **Desenho Geométrico**. UEPA: 2006. Disponível em <http://www.ceap.br/artigos/ART24022010182855.pdf>. Acesso em 19 mar. 2016.

REZENDE, Eliane Quelho Frota e QUEIROZ, Maria Lucia Bontorim. **Geometria Euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Unicamp, 2000.

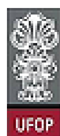
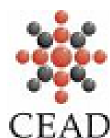
SOUZA, Cláudio Santos de; PIMENTA, Milene Maria D.; ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares. **Construções geométricas**. V.1. Fundação CECIERJ, Consórcio CEDERJ. Rio de Janeiro.

SOUZA, Cláudio Santos de; ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares. **Construções geométricas**. V.2. Fundação CECIERJ, Consórcio CEDERJ. Rio de Janeiro.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Apostila das Olimpíadas Brasileiras de Matemática da Escola Pública. OBMEP: 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das Construções Geométricas, entre outras considerações**. In: 25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação - ANPED, 2002, Caxambú. Disponível em: <http://25reuniao.anped.org.br/excedentes25/elenicezuint19.rtf>. Acesso em: 19 mar. 2016.


UFOP

CEAD

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL